MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Průřez mechanikami – klasickou, relativistickou i kvantovou – pro fyziky i nefyziky

Jan Obdržálek

Odborná edice
MatfyzPress

PRAHA 2024

ISBN 978-80-7378-504-8

Prurez mechanikami - text.indd 2 05.01.2024 13:37:37

Věnováno profesoru Martinu Černohorskému
k jeho 100. narozeninám

Anotace, rada nedočkavým a poděkování

Učebnice vykládá klasickou a relativistickou mechaniku a uvádí i do mechaniky kvantové. Je určena především jako úvodní text pro studující přírodovědných oborů, ale také pro matematiky, lékaře, učitele na SŠ a vůbec pro každého, kdo potřebuje hlouběji pochopit principy. Vysvětluje základní pojmy z oborů, cituje termíny podle norem, probírá znovu podrobně látku, která se často na SŠ nestihne vysvětlit (např. stav beztíže, Coriolisovu a další „setrvačné síly“, grafický popis pohybu, relativita času), pokud možno prostředky SŠ matematiky (např. užitím grafu).

Odstavce a kapitoly označené $\hookleftarrow$ můžete přeskočit, aniž ztratíte souvislost.

Za cennou pomoc s obrázky a s grafy děkuji doc. RNDr. Jiřímu Bokovi, CSc. a odbornému konsultantovi Mgr. Radimu Kusákovi. Za definitivní formátování, odbornou i všestrannou pomoc děkuji doc. RNDr. Martinu Čížkovi, Ph.D., a zejména pak doc. RNDr. Karlu Houfkovi, Ph.D.

Děkuji všem, kdo přečetli text a upozornili na nedostatky nejrůznějšího druhu. Byli to zejména (abecedně): Bc. Tomáš Blovský, Prof. RNDr. Jiří Horáček, DrSc., RNDr. Jitka Houfková, Ph.D., RNDr. Vojtěch Kapsa, CSc., doc. RNDr. Oldřich Semerák, DrSc., Filip Strakoš, a zvláště pak RNDr. Karel Zimmermann, CSc., který rukopis zevrubně prostudoval a opakovaně korigoval; mj. jeho zásluhou ubylo mnoho (zbytečných) závorek a zmizely skoro všechny poznámky pod čarou[1] — přesunuly se do hlavního textu na vhodnější místo, případně beze škody odešly.

Last but not least děkuji velice oběma recenzentům za velmi pečlivou práci.

Za zbývající nedostatky jsem ovšem odpovědný jen já sám a uvítám, když mne na ně upozorníte, např. na mou fakultní adresu `jan.obdrzalek@mff.cuni.cz`.

[1] ☺ Tato poznámka pod čarou a jí předcházející závorky zůstaly coby odstrašující příklady.

Obsah

1 O fyzice obecně

Místní zvyklosti:

Části označené $\hookleftarrow$ můžete přeskočit, aniž ztratíte souvislost (jak ví ze str. 2 ten, kdo četl knihu řádně od počátku).

Jednotlivé kapitoly jsou psány dosti nezávisle, aby nebylo zcela nezbytné číst všechny předchozí (např. kap. 6); proto jsou občas na začátku připomenuty věci již dříve řečené.

Ve výkladu průběžně uvádíme ty anglické termíny, které se od českých výrazněji liší, třeba hybnost {*momentum*}, nebo kde by čtenář váhal: moment hybnosti {*moment of momentum*}, nebo kde bývají překladače nepřesné: anglický termín pro hmotný bod je {*mass point*}, nikoli *material point*, jak si myslí Google. Termíny prakticky stejné jsou však pro zkrácení textu značeny vlnovkou: moment síly { ˜ *of force*} namísto {*moment of force*}, anebo konstanta {˜} namísto {*constant*}; v anglickém rejstříku je však najdete uvedeny všechny, tedy i tuto *constant* 9, 32. Hranice „samozřejmosti“ pro vlnovku byla ovšem vágní.

Wikipedie *anglická* (https://en.wikipedia.org), ale i *česká* (https://cs.wikipedia.org) jsou v oblasti fyziky díky povinným odkazům na literaturu a dobré práci správců (i veřejnosti!) spolehlivé — rozhodně dostatečně pro úvod do problematiky. Odkazujeme na ni u hesel a detailů, které by tu někdo snad postrádal, jiného by však nezajímaly (třeba životopisná data vědců). Zapište v příslušné jazykové verzi Wikipedie do vyhledávacího pole jméno osoby či podtržené heslo, např. $\mathbf{W}_{\mathrm{EN}}$→<u>tide</u> nebo $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→<u>Slapové jevy</u>.

Osoby uvádíme zpravidla jen příjmením. Jejich úplná jména se všemi křestními jmény a případnými šlechtickými přídomky najdete v rejstříku spolu s číslem stránek všech výskytů jména. Další vám o nich opět sdělí naše milá Wikipedie. (A dejte prosím pozor: u nás žil a zemřel Tycho Brahe, nikoli Tycho *de* Brahe.)

Počešťování koncových hlásek cizích vlastních jmen nebývá v literatuře jednotné, a přitom pádové koncovky jsou pro flektivní češtinu zásadní. V souladu s ÚJČ (Ústav pro jazyk český) a díky benevolenci Diraca (Dirac), Boseho (Bose) i Lagrangeově (Lagrange) jsme přilepili české koncovky k jejich jménům, a jsme vděčni např. Hookovi (Hooke), že mu není líto nečteného koncového -e, nemá-li vliv ani na výslovnost. Fonetickým odvozeninám typu lagranžián (Lagrange) se příslušní vědci také neubránili. Doporučená česká výslovnost cizích jmen je občas uvedena v hranatých závorkách: Darboux, čti [darbu], Darbouxova věta, čti [darbuova].

Termíny (např. **hmotný bod**) i jejich zkratky (**HB**) jsou při prvním výskytu, a občas i později, uvedeny tučně, vždy s odkazem v rejstříku a většinou i s termínem anglickým. Jeden *maličký* termín jsem si přimyslel v odst. 1.8.4 a používám ho zhusta; ale nebojte se: v oné kapitole se k tomu přiznávám.

Občas je v textu zařazena otázka označená **..?**; řešení je na konci kapitoly.

1.1 Fyzika coby věda

Fyzika je **věda** {*science*} **objektivní** {˜}. Snaží se proto o co nejmenší vliv **subjektu** {˜}, tj. člověka, který vědu tvoří nebo ji přijímá, a maximální vliv **objektu** {˜}, který je vědou studován.

Subjektivní přístup, pohled atd. je podstatný např. v umění. Zajímá také didaktiku fyziky.

Jako každá objektivní věda, i fyzika vytváří **pojmy** {*concept*} vhodné pro popis reality, přiřazuje jim názvy — **termíny** {*term*} a formuluje **model** {˜}; studuje vlastnosti tohoto modelu a porovnává ho s **pozorováním** {*observation*}, případně s **experimentem** {˜}. Ideálem je pak možnost na základě modelu předvídat to, co nejde měřit přímo, nebo co se stane v budoucnu, nebo co bylo v minulosti.

Fyzika zavádí a používá zejména fyzikální **veličiny** {*quantity*}; veličina popisuje takovou **vlastnost** {*property*} objektu, kterou lze vyjádřit číslem a **referencí** {˜} (tou je zpravidla fyzikální **jednotka** {*unit*}, detaily viz str. 339), a tím v principu i měřit.

Měření {*measure*} má pro fyziku obrovský význam; mj. vytváří a udržuje potřebnou objektivitu fyziky (a vědy vůbec). Viz též kap. D.3.
Galileo: Co lze změřit, máme změřit; co změřit nejde, máme převést na měřitelné.
Lord Kelvin (1906, založení IEC): Nemůžete-li to změřit, nemůžete to zlepšit.

Hlavní kritérium správnosti fyzikální teorie je koneckonců soulad teorie s pozorováním reálného světa. *Dílčí* kritéria jsou např. vnitřní logická konzistence, vyvratitelnost (viz odst. 1.8.9), občas i jednoduchost teorie (nezavádění nadbytečných pojmů, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Occamova břitva).

1.2 Fyzika v rámci ostatních věd

Fyzika i **technika** {*technology*} jsou **přírodní** vědy {*natural science*}, nikoli **vědy společenské** {*social* ˜} či **humanitní** {*humanities*} (o člověku a lidské společnosti, podrobněji viz $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Společenské vědy).

Další přírodní vědy jsou např. **chemie** {*chemistry*}, **biologie** {˜}, ale i specializované: **mineralogie** {˜}, **geofyzika** {˜}, **astrofyzika** {˜}, apod.

Filosofické kategorie {˜˜}, konkrétně **příčina** {*cause*} a **důsledek** {*consequence*}, se příležitostně vyskytnou v aplikacích (např. při interpretaci prostoročasových vztahů v teorii relativity). Předmětem našich úvah však **nebudou** typické filosofické kategorie typu **vědomí** {*consciousness*}, svobodná vůle, myšlenka, víra, Bůh, smysl života či věcí, dobro, zlo, apod. Mohou se samozřejmě vyskytnout ve styčných oblastech s historií vědy, didaktikou či v **aplikované fyzice** {˜˜}.

Akce a reakce podle 3. Newtonova zákona *nemají* charakter příčiny a důsledku. Mj. začínají a končí vždy současně, reakce tedy *nenásleduje po* akci. Podrobně viz str. 79.

Předmět zájmu Fyzika zkoumá nejzákladnější **procesy** {˜} neboli **děje** v přírodě, zejména neživé (i když **biofyzika** {˜} vykládá fyzikálními metodami i chování živých objektů). Fyzika je ze všech přírodních věd nejvíce „matematizovaná“ (fakticky: axiomatizovaná, má co nejpřesněji formulované předpoklady i pracovní metody). V jistém smyslu je i „nejhlubší“ přírodní vědou: např. kvantová fyzika (pod krycím názvem **kvantová chemie** {*quantum chemistry*}) vysvětluje pojem **chemické vazby** {˜ *bond*}, který je klíčový pro chemii a který chemie jen fenomenologicky (odst. 1.8.3) postuluje z experimentu.

Existuje řada **mezních oborů** a **aplikací**: zmíněná **fyzikální chemie** {*physical chemistry*} a **biofyzika** {˜} (fyzikální základy základních projevů živých organismů), **biomechanika** {˜} (např. mechanika člověka pro balet či sport), **biofyzikální chemie** {˜}, **geofyzika** {˜}, **astrofyzika** {˜}, **meteorologie** {˜}, atd.

V historii šel velmi často ruku v ruce vývoj fyziky a **matematiky** {˜}. Newton vytvořil diferenciální počet pro popis pohybu hmotného bodu; podobně Cauchy a Riemann vybudovali teorii parciálních diferenciálních rovnic pro popis mechaniky kontinua. Fyzika využívala hotového matematického aparátu; byla to např. **teorie grup** {*group theory*}, z níž zejména **teorie reprezentací** {*group representation*} má rozsáhlé a klíčové aplikace v kvantové teorii. Také však fyzika inspirovala matematiky pro aktivitu v nových oblastech: fyziky užívaná, ale matematicky nekorektní Diracova δ-funkce vedla v matematice k **teorii distribucí** {˜}.

1.3 Fyzika klasická, relativistická, kvantová

Základní je rozdělení na

- teorie ***nerelativistické*** vs. (= versus, oproti) ***relativistické***, když se projeví, že **světelná rychlost** {*luminal speed*} $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ není nekonečná (zejména při vysokých vzájemných rychlostech).
  Tento novější termín je lepší než popisná **rychlost světla ve vakuu** {*speed of light in vacuum*}. Je kratší a „rýmuje“ se s **nadsvětelnou** {*superluminal*} a **podsvětelnou** {*subluminal*} rychlostí. Podle normy se značí c_0, ale toleruje se i pouhé c tam, kde nehrozí záměna s jinými rychlostmi (jako např. zde);

- teorie ***nekvantové*** vs. ***kvantové***, kdy se uplatní diskrétní struktura hmoty a energie, konkrétně to, že **Planckova konstanta** {˜} $h = 6{,}624\ldots \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$ není nulová.

Popis:	nerelativistický	relativistický
nekvantový	$c \approx \infty \quad h \approx 0$	$c < \infty \quad h \approx 0$
kvantový	$c \approx \infty \quad h > 0$	$c < \infty \quad h > 0$

Původně bylo „klasický“= „nekvantový & nerelativistický“, postupem času je stále častěji „klasický“ = „nekvantový“. ☺ Relativita už je halt pomalu klasikou…

Moderní fyzika Termín „moderní fyzika“ se užíval jako protiklad ke klasické fyzice a zahrnuje **teorii relativity** a zejména **kvantovou fyziku**.
Dámy, všimněte si, že označení „moderní“ dosud slouží pro discipliny více než století staré.

Princip korespondence {˜˜} $\mathbf{W}_{\mathrm{EN}}$→correspondence principle (poprvé r. 1920 Bohr), v jádře říká, že klasická fyzika je aproximací kvantové fyziky pro $\hbar \to 0$ (např. u modelu vodíku pro vysoká kvantová čísla; pro kvantový oscilátor viz obr. 11.8). Měl význam zejména v prvopočátcích, kdy současné teorie byly teprve „hypotézami“ a fakticky vyjadřuje kontinuitu fyziky při poznávání světa: ani převratné novinky v popisu a chápání světa nevyvracejí platnost starých osvědčených znalostí, ovšem jen ve speciálních (makroskopických) situacích. Tento princip je pravdivý i pro relativitu (při $c \to \infty$ přechází do klasické fyziky).

1.4 Výchozí představy — klasická fyzika

1.4.1 Rámec popisu

Zde uvádíme jen přehled. Podrobněji viz odst. 2.5.1.

Prostor Z geometrie využíváme **vztažnou soustavu** {*frame*}, nejraději **kartézskou** {*cartesian frame*}, s **euklidovskou metrikou** {˜}. **Prostor** {*space*} je **plochý** {*flat space*} neboli není zakřivený, čili vzdálenost dvou bodů je dána Pythagorovou větou; v **zakřiveném prostoru** {*curved space*}(str. 256) tomu tak není a vzdálenost měříme pomocí metrického tenzoru, odst. 2.3.7. Prostor popisujeme trojrozměrnou (3D) vztažnou soustavou (odst. 3.2.1).

Čas **Čas**{*time*} je jednorozměrný (1D) a plyne jen jedním směrem. Z filosofie přebíráme **princip kauzality** {˜˜}: časově dříve nastane příčina, po ní teprve důsledek. Ve vlastní fyzice se s kauzalitou pracuje hlavně v teorii relativity při interpretaci časových relací, jinak zřídka.

Prostoročas V klasické fyzice jsou prostor a čas *nezávislé* na sobě a vytvářejí *pevný rámec pro popis* přírodních dějů zajímajících fyziku. V moderních partiích fyziky tomu tak už není: ve **speciální** teorii relativity, **STR** {˜}, jsou prostor a čas svázány na **prostoročas** {*spacetime*} (4D), v **obecné teorii relativity**, **OTR**, též **GTR** {˜}, má prostoročas aktivní účast na dynamice těles: vystihuje, a tím nahrazuje dosavadní gravitaci. Vztažná soustava se rozšiřuje o čtvrtou, časovou souřadnici.

Dříve také užívaný termín **časoprostor** měl týž význam.

1.4.2 Objekt

V klasické fyzice jsou dvojí základní „stavební kameny" popisu našeho světa:

- **částice** {*particle*} korpuskulární povahy;

  (Lat. corpus = těleso, corpusculum = tělísko, částice)

- **pole** {*field*} vlnové povahy.

Tyto objekty jsou principiálně různé; částice je lokalizována na jednom místě, zatímco pole je rozložené v prostoru. Proto byl tak velký rozpor mezi korpuskulární a vlnovou teorií světla. Tento rozdíl setře *kvantová fyzika*, která jak částice, tak pole vystihuje stejným pojmem — kvantovým polem či kvantovou částicí (která je kvantem tohoto pole) a popisuje obojí vlnovou funkcí. Viz odst. 1.6 a kap. 11.

Objekty korpuskulární povahy

Těleso {*body*} je obvyklým modelem objektu. Má jistý **tvar** {*shape*} a jistou **polohu** {*position*} v prostoru (vs. objekty abstraktní, např. OSN nebo vláda ČR). Tvar se může s časem buď měnit: těleso **deformovatelné** {˜}, tvořené **kontinuem** {˜}, anebo se nemění: **tuhé těleso** {*rigid body*} (něco jiného je **pevná látka** {*solid state*}, viz dále).

Látka {*substance*} = **hmota** {*matter*} = hmotné **prostředí** {*medium*} = **materiál** {˜} jsou pro nás synonyma; termín „hmota" se užívá tam, kde je podstatná veličina **hmotnost** {*mass*}.

Hmotný bod {*mass point*}, **HB**, je těleso, jehož vlastní délkové rozměry jsou v dané úloze nepodstatné a lze ho tedy buď rovnou pokládat za bodové, nebo ho v dané úloze bodem nahradit. Jako synonymum zde zpravidla používáme kratší, jednoslovné označení **částice** {*particle*}.

Něco jiného je však „**elementární částice**“ {˜ *particle*} v kvantových teoriích.

Poloha částice v 3D prostoru je určena třemi souřadnicemi, např. kartézskými x, y, z, obecně proměnnými v čase (tedy $x(t), y(t), z(t)$). Předpokládá se, že částice má hmotnost $m \neq 0$, aby byly použitelné pohybové rovnice, např. 2. Newtonův zákon. Z praxe také známe klasické částice jen s $m > 0$. ☺Až na bublinky v šampusu!

Soustava (= **systém** {˜}) několika částic (hmotných bodů) může být též studována jako celek.

Spojité prostředí (**kontinuum** {˜}) je např. voda v moři, vs. **diskrétní soustava** {*discrete system*} (systém několika částic nebo tuhých těles), kterou tvoří např. písek a kameny na pláži.

Kontinuum pokládáme v klasické fyzice za nekonečně jemně dělitelné; moderní člověk ovšem ví, že nemůže dělit do oblastí co do délkových rozměrů srovnatelných s molekulami příslušné látky. ☺Proto taky zavádíme jeden *maličký* termín v odst. 1.8.4.

Kontinuum lze také získat abstrakcí obrácenou, když vyjdeme ze souboru částic, jejichž počet zvětšujeme a rozměry zmenšujeme tak, aby vhodné veličiny, jako je např. hustota látky, měly fyzikálně rozumnou limitu.

Vedle zmíněného tvaru a polohy v prostoru je **atributem** {˜} (= nepostradatelnou vlastností) tělesa zejména **hmotnost** m {*mass*}, případně **náboj** q {*charge*}, na úrovni elementárních částic dále **spin** $\vec{s}$ {˜} coby vlastní moment hybnosti (odst. 4.6.3) elementární částice či jejich systému.

Pole

Pole {*field*} bylo původně zavedeno k popisu sil působících **na dálku** (na rozdíl od **kontaktních** sil, které působí na bezprostřední blízkost, např. při srážce, Dodatek B). Konkrétně pro popis vzájemného působení elektricky nabitých těles bylo zavedeno $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→**elektromagnetické pole** (Maxwellovo teoretické zpracování Faradayových pokusů, a ovšem příspěvky řady dalších významných fyziků). Postupně se však elektromagnetické pole rozvinulo do samostatné kategorie; bylo mu nutno připsat nejen vlastní energii, ale i hybnost (světelné vlně) a moment hybnosti (vlně kruhově polarizované), což byly do té doby veličiny používané jen pro hmotu.

Éter

Významný, byť nakonec neúspěšný, byl pokus připsat elektromagnetickému poli mechanického nosiče, **éter**, a tím řešit nakonec i problematiku pole jako část mechaniky. Odtud pochází např. starý termín pro elektrickou indukci, totiž **elektrické posunutí** {˜ *displacement*} $\vec{D}$ éteru, které mělo nastat pod vlivem „síly“ — elektrické intenzity $\vec{E}$. Světlo by pak bylo vlněním éteru, apod.

Éter však musel mít protichůdné vlastnosti: snadno pronikat např. sklem (světlo sklem prochází bez problémů), ale přitom mít velikou tuhost (nutnou pro vysokou rychlost světla). Bezvýchodnost koncepce éteru viz odst. 10.6.7.

Klasická **teorie elektromagnetického pole** však už od počátku splňuje všechny relativistické požadavky. Je např. invariantní vůči Lorentzově a nikoli Galileově transformaci.

Dnes pokládáme elektromagnetické pole za *vlastnost prostoru.*

Vedle představy náboje jako příčiny a pole jako důsledku byly ve 20. letech 20. stol. pokusy interpretovat naopak pole jako příčinu a náboje jako důsledek — „uzlíky“ (singularity) v poli. S příchodem kvantové teorie přestaly být tyto spory důležité.
☺ Alan Watts: „Pták je jen prostředníkem k tomu, aby se vejce opět stalo vejcem.“

1.4.3 Vztahy mezi objekty

Interakce {˜} (vzájemné působení) mezi látkovými objekty se popisuje v klasické fyzice pojmem **síla** {*force*} (podrobněji viz odst. 2.5.3); jejím spojitým zobecněním je silové **pole** {*field*}, např. gravitační pole či elektromagnetické pole.
Z jazykového hlediska připomeňme, že přívlastek „*vzájemná* interakce“ je nadbytečný.

Omezení pohybu popisujeme vazbou, viz odst. 9.4.1.

1.4.4 Veličiny

Veličina {*quantity*} je **vlastnost** {*property*} **tělesa** {*body*} či **látky** {*substance*} či **jevu** {*phenomenon*} popsatelná **číslem** {*number*} a **referencí** {˜}.

Příkladem tělesa je zvon; jeho látkou je zvonovina (bronz), zkoumaným jevem je zvuk a veličinou rychlost zvuku, např. 330 m/s ve vzduchu, 4 700 m/s ve zvonovině.

Referencí je u fyzikální veličiny její **jednotka** {*unit*}, u technické veličiny **měřicí jednotka** {*measurement unit*}, **měřicí metoda** {˜}, **referenční materiál** {˜} nebo jejich kombinace, viz kap. D.2.

Příkladem fyzikální veličiny je rychlost (m/s) či hustota ($\mathrm{kg/m^3}$), technickou veličinou je např. síla zemětřesení (Richterova stupnice) či tvrdost materiálu podle Brinnela.

Fyzikální rozměr veličiny

Nyní užívaná soustava veličin ISQ (International System of Quantities) a jednotek SI (Système International d'Unités) vychází ze 7 **základních veličin** {*base quantity*}: čas (rozměr: T; základní jednotka: sekunda, s), délka (L; metr, m), hmotnost (M; kilogram, kg), elektrický proud (I; ampér, A), termodynamická teplota (Θ; kelvin, K), látkové množství (N; mol, mol) a svítivost (J; kandela, cd).

Často se namísto značky rozměru: L/T, $\mathrm{M\,L^{-3}}$ ... užívá nepřesně, ale srozumitelně značka jednotky: m/s, $\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ...

1.4.5 Měření

Měření veličiny provádíme interakcí měřeného objektu a měřicího přístroje. V klasické fyzice předpokládáme, že proces měření buď vůbec neovlivňuje měřenou veličinu (např. „bezkontaktní“ optické měření délky laserem), nebo ji ovlivňuje známým, pro daný účel „nezávadným“ způsobem, např. ozubené kolo se západkou a pružinou u mikrometru zvané „řehtačka“ omezuje a určuje tlak měřicích čelistí na měřený předmět.

V kvantové fyzice, odst. 11.3.3, však obecně *každé* měření *mění* stav měřeného objektu.

1.5 Výchozí představy — teorie relativity

U **relativity** nastává podstatná *změna názoru na prostor a čas.* Spojují se v prostoročas, takže současnost, doba trvání děje, apod. jsou závislé na vztažné soustavě, z níž děj popisujeme. Naproti tomu světelná rychlost c (str. 11) je absolutní, stejná v každé inerciální (viz odst. 4.4.4) soustavě. Speciální teorie relativity ukazuje, že celková energie E systému souvisí s jeho setrvačnou hmotností m vztahem $E = mc^2$.

1.5.1 Speciální teorie relativity

Speciální teorie relativity {˜}, STR{˜} pracuje v **plochém prostoročase** {*flat spacetime*} (tedy nezakřiveném). Zahrne vedle mechaniky i elektromagnetické pole, ale gravitací se nezabývá. V kap. 10 vysvětlíme podrobně relativistickou kinematiku a základy relativistické dynamiky, ale nikoli elektromagnetické pole; to již leží mimo mechaniku.

1.5.2 Obecná teorie relativity

Obecná teorie relativity {*general* ˜}, OTR {*GTR*} popisuje děje v nejobecnějších vztažných soustavách (odst. 3.2.1) a zahrne tak i gravitaci. Popíše ji jako vlastnost prostoročasu, totiž jeho **zakřivení** {*curvature of spacetime*}. Je matematicky velmi náročná (diferenciální geometrie v zakřivených prostorech) a zde se jí nezabýváme.

1.6 Výchozí představy — kvantová fyzika

Kvantová fyzika {˜˜}, vycházející z **kvantové mechaniky** {˜˜} a dovršená **kvantovou teorií pole** {˜ *field theory*} (též zvanou historicky **druhé kvantování** {*second quantization*}) mění podstatně *pohled na částici* (objekt doposud „korpuskulární povahy“) a na *pole* (objekt doposud „vlnové povahy“). Mění se tím i představa a pojem **hmoty** {*matter*} (tedy samého *objektu*, nejenom *hmotnosti* coby jedné z mnoha vlastností kusu hmoty). V tomto odstavci podáme jen přehledovou informaci; kvantovou mechaniku zdůvodníme a přiblížíme v kap. 11.

1.6.1 Objekt

Kvantová mechanika popisuje **kvantovou částici** {˜ *particle*} **vlnovou funkcí** {*wave function*} Ψ rozprostřenou v prostoru, tedy nevázanou na jediné místo, kde by částice „měla být“. Tím je vystiženo, že i typické částice (elektron, proton, ale i celé molekuly) vykazují také vlastnosti pokládané za typicky vlnové, jako třeba **interferenci** {˜}. Toto dvojaké chování kvantových částic se nazývalo **korpuskulárně vlnový dualismus**.

Vlnová funkce sama nemá bezprostřední fyzikální interpretaci, ale slouží k odvození a výpočtu všech měřitelných informací o částici, tedy fyzikálních veličin (polohy, energie apod.) které lze pak experimentálně ověřit. Systém složený z více částic však není popsán několika vlnovými funkcemi pro jednotlivé částice, ale jedinou vlnovou funkcí, která závisí na vlastnostech (např. poloze) všech částic systému. Protože stejné částice jsou experimentálně navzájem nerozlišitelné, musí také vlnová funkce takového systému splňovat určité vlastnosti (musí být symetrická nebo antisymetrická) při záměně libovolných dvou částic.

Na vyšší úrovni kvantové fyziky, na úrovni kvantové teorie pole, lze také kvantovat libovolné pole. Stavy můžou mít libovolný, i proměnný počet částic a vlnovou funkci pak chápeme jako operátor pole na abstraktním Fockově prostoru, $\mathbf{W}_{\mathrm{EN}}$→Fock space. Pole (např. elektromagnetické) si vyměňuje s okolím energii jen po jistých dávkách — kvantech (vždy po celistvém počtu fotonů), jako by bylo „zrnité“.

1.6.2 Nové veličiny a vlastnosti

Vektorová veličina **síla** se nezavádí. Užívá se jen skalární **energie** systému, v níž je vzájemné působení mezi částicemi popsáno **potenciální energií**.

Spin {˜} Kvantová částice má novou, neklasickou charakteristiku zvanou **spin** $\vec{s}$. Má vektorovou povahu a chová se jako moment hybnosti (str. 83), tedy jako by se hmotná částice otáčela kolem své osy. Má-li částice navíc elektrický náboj, projevuje se pak jako magnet (má magnetický moment).

Např. kladný proton má spin, a tedy i magnetický moment. Ale má ho i navenek neutrální neutron, protože se skládá ze tří různě nabitých kvarků. Jejich náboje se navenek vyruší, ale spiny a magnetické momenty nikoliv.

Spin i jeho průmět do libovolného směru jsou kvantovány a mohou nabývat jen násobku **redukované Planckovy konstanty** $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, a to

- celočíselného (0, 1, ...); taková částice se nazývá **boson** {˜}, čti [bozon], nebo
- poločíselného ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$); taková částice se nazývá **fermion** {˜}.

Běžně se říká, že např. elektron je fermion a má spin $\frac{1}{2}$; rozumí se tím, že velikost spinu je rovna $\frac{\hbar}{2}$. Spin má mj. zásadní roli pro chování systému stejných částic.

Nerozlišitelnost {**indistinguishability**} Kvantové částice nemají svou individualitu: částice téhož druhu, např. dva elektrony, jsou navzájem nerozlišitelné. Vletí-li elektron do atomu a vyrazí ven některý z jeho elektronů, nelze rozhodnout (a nemá ani smysl otázka), který ze dvou dále letících elektronů byl „ten z atomu“.

Klasickou analogií nerozlišitelnosti jsou koruny na elektronickém bankovním účtu: dostáváte-li na konto každý den jednu korunu, nemá smysl otázka, zda příští týden vybraná koruna bude pondělní či páteční. Koruny na elektronickém kontě jsou nerozlišitelné.

Podobně: jdou-li po hladině na řece proti sobě dvě rovinné vlny, nelze a nemá smysl rozlišovat, zda se vlny od sebe odrazily, nebo zda jedna prošla skrz druhou („která je která“). Vlna je abstraktní konstrukce; vlnu běžící na hladině netvoří „balík vody“, který by běžel jako celek, ale tvoří ho postupně v různých místech různé vodní částice. Je to vidět na korku na hladině; prostě vykývne nahoru a dolů, není stržen do vodorovného pohybu s vlnou. Nejde s vlnou, aby ji mohl označit. Ani obarvená kapka ve vodě není vlnou stržena.

Bosony a fermiony Nerozlišitelnost kvantových částic se projevuje tím, že při záměně proměnných dvojice stejných částic 1, 2 se vlnová funkce buď vůbec nezmění, $\Psi(1,2) = \Psi(2,1)$, nebo změní znaménko, $\Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$. Jiná možnost nemůže nestat, viz rov. (11.127). Z kvantové teorie pole vyplyne, že první případ nastává, mají-li částice celočíselný spin, tj. pro bosony, kdežto změna znaménka je nezbytná, mají-li poločíselný spin, tj. pro fermiony. Uveďme předem, že násobení vlnové funkce číslem, jako je zde −1, nemá fyzikální důsledky.

Každá elementární částice je buď ***boson*** *{˜}, nebo* **fermion** *{˜}.*

Fermiony vytvářejí tu *hmotu*, kterou známe z klasické fyziky. Mají vlnovou funkci antisymetrickou vůči záměně dvou stejných částic, proto pro ně platí Pauliho vylučovací princip, viz dále. Dosud známé fermiony mají nenulovou klidovou hmotnost a řídí se Fermiho-Diracovou statistikou, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Fermiho-Diracovo rozdělení. V rámci kvantové teorie pole spolu interagují sdílením či výměnou vhodných bosonů (např. elektricky záporný elektron s elektricky kladným protonem prostřednictvím elektricky neutrálních fotonů). Fermiony mají poločíselný spin.

Bosony mají vlnovou funkci symetrickou vůči záměně dvou stejných částic. Řídí se Boseho-Einsteinovou statistikou, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Boseho-Einsteinovo rozdělení. Ve Standardním modelu, kap. 1.7, popisují interakci fermionů. Některé mají nulovou klidovou hmotnost, např. **foton** γ popisující elektromagnetickou interakci a **gluon** g popisující interakci **kvarků** tvořících např. neutrony a protony. (Důsledkem této interakce mj. drží pohromadě atomové jádro složené z navzájem se odpuzujících kladně nabitých protonů a neutrálních neutronů). Bozony mají celočíselný spin.

Pojem **elementární částice** {˜ *particle*} se postupně zúžil na částice uvedené dále ve Standardním modelu, kap. 1.7. ☺ Na další zúžení čekáme.

Pauliho vylučovací princip (podrobněji viz odst. 11.5.3){*Pauli exclusion principle*}

> *Dva fermiony (např. dva elektrony) nemohou být v jednom systému v tomtéž stavu.*

Pauliho princip je klíčový např. pro stavbu atomu a tím pro chemii.

Pohybová rovnice Časový vývoj vlnové funkce Ψ se řídí příslušnou pohybovou rovnicí, např. **Schrödingerovou rovnicí** pro nerelativistický elektron nebo **Diracovou rovnicí** pro elektron relativistický. Jsou to parciální diferenciální rovnice.

Veličina Každé fyzikální veličině částice (poloze $\vec{r}$, energii E, hybnosti $\vec{p}$, ...) přísluší **operátor** $(\widehat{\vec{r}}, \widehat{E}, \widehat{\vec{p}}, \dots)$ přiřazující jedné vlnové funkci obecně jinou funkci a zastupující tuto veličinu ve fyzikálních rovnicích. Umožňuje spočítat, jaké hodnoty veličiny můžeme naměřit v daném stavu a s jakou pravděpodobností.

Kvantování Podobně jako je kvantována hmota (např. na pohled spojitá voda je tvořena jednotlivými molekulami), kvantují se v kvantové mechanice i vlastnosti hmoty, např. energie nebo moment hybnosti. Atom vodíku tvořený elektronem a protonem navzájem se přitahujícími má povoleny jen některé stabilní stavy; ty mají zápornou energii, bereme-li nulovou hodnotu energie pro situaci, kdy jsou obě částice od sebe tak daleko, že už na sebe prakticky nepůsobí („v nekonečnu"). Při interakci atomu vodíku s okolím se energie vodíku mění, např. zářením, jen o dané rozdíly energií jednotlivých stavů, nikoli tedy spojitě. Spektrum takového záření je složeno z jednotlivých čar odpovídajících jistým frekvencím, a tím jen jistým energiím vyzařovaných fotonů.

Klasickou analogií je kompaktní pískovcová socha skládající se při podrobnějším pohledu z malých samostatných zrníček písku. Podobně ze svého konta v bance můžete vybírat hotovost jedině v celých korunách, ale nikoli třeba 2π Kč.

Kvantová teorie pole pak kvantuje i pole v klasické teorii spojité (elektromagnetické pole na fotony).

Měření je interakce objektu s měřicím přístrojem. Zabýváme se s ní v odst. 11.3.3. Zde jen dopředu uvedeme, že na rozdíl od klasické fyziky měření

- *ovlivní* měřený objekt, a to tak, že
- zcela *náhodně* vybere výsledek jako jednu z tzv. vlastních hodnot operátoru měřené veličiny a dosavadní vlnovou funkci objektu nahradí příslušnou vlastní funkcí operátoru měřené veličiny (tzv. **redukce vlnového klubka**, {*reduction of the wave packet*}, nověji **kolaps** {˜} vlnové funkce. Možné naměřené hodnoty i pravděpodobnosti, s jakými budou vybrány, jsou původní vlnovou funkcí a operátorem měřené veličiny dány jednoznačně. Blíže viz odst. 11.3.3.

Miliarda fotonů, každý s toutéž vlnovou funkcí, vytvoří po průchodu dvojicí štěrbin rozptylový obrazec typický pro klasickou vlnu. Je složený z miliardy jednotlivých bodů, dopadlých fotonů. Ale jakýkoli pokus určit pro jednotlivý vylétající foton štěrbinu, kterou proletí nebo konkrétní polohu, kam dopadne, je předem odsouzen k neúspěchu. Byly experimentálně vyvráceny tzv. **teorie skrytých parametrů** {*hidden variables*} předpokládající, že foton (nebo kterákoli jiná kvantová částice) „ve skutečnosti“ má nějakou přesnou polohu, kterou jen my nejsme zatím schopni dostatečně přesně určit, viz str. 281 a $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→**Bellova nerovnost**. Proces měření i interpretace kvantové fyziky jsou stále předmětem zájmu fyziků.

Zatímco v klasické fyzice se předpokládá možnost provést měření natolik „šetrně“, aby tato interakce znatelně neovlivnila měřený objekt, v kvantové fyzice je nutno počítat s tím, že v principu *každé* měření *změní měřený objekt.* (Jedinou výjimkou je vzápětí opakované měření téže veličiny; to už měřený objekt nezmění, ale také o něm nepřinese žádnou novou informaci.)

Klasickou analogií situace, kde i nejjemnější měření, provedené pouhým verbálním kontaktem, podstatně změní situaci měřeného systému a převede ho do některého z měřením umožněných stavů (jen s předběžnou pravděpodobností, který z nich to bude, ale s jistotou, že to bude jeden z nich) by mohla být otázka vyřčená na plese jednou osobou z tančícího páru: „Miluješ mne?“ v situaci, kdy by přicházela v úvahu jen jasná odpověď ano — ne. Je zřejmé, že měřený objekt se vůči uvedenému problému před otázkou nacházel v neurčitém stavu, který připouštěl s různými pravděpodobnostmi jednu z uvedených možností; položením otázky a odpovědí na ni se však situace mění, měřený objekt přejde (s příslušnou pravděpodobností) do jediného ze dvou přípustných stavů. Nezmění ho při event. dalším měření veličiny, která je s předchozí otázkou slučitelná (matematicky: když operátory měřených veličin komutují). Aspoň na chvíli, do další interakce a měření jiných veličin nebo měření s jinými objekty.

Interpretace kolapsu a procesu měření v kvantové teorii je jednou z dosud otevřených otázek. Původní Bohrova interpretace popisuje měření jako *náhodný* *pravděpodobnostní děj* vyvolávající *nekauzální* změnu objektu, jinou, než je běžný (kauzální) časový vývoj objektu. Novější interpretace typu Everettovy, nelokální De Brogliova-Bohmova ze str. 281 aj. daleko překračují rozsah a možnosti tohoto skrovného Průřezu mechanikami.

Heisenbergův princip neurčitosti {*uncertainty principle*} říká např., že elektron *nemá* současně jistou polohu x a jistou rychlost v (přesněji řečeno, souřadnici x a jí odpovídající složku hybnosti $p_x = mv_x$, kde m je hmotnost elektronu). Čím přesněji změříme jeho polohu, tím více rozmažeme jeho hybnost a naopak. Jsou-li příslušné neurčitosti polohy Δx a odpovídající složky hybnosti Δp_x, pak platí **relace neurčitosti**

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{1.1}$$

kde $\hbar$ je redukovaná Planckova konstanta. Analogická relace platí i pro jiné dvojice veličin (veličiny kanonicky sdružené, $\mathbf{W}_{\mathrm{EN}}$→Canonical coordinates).

Není to však naše neumění (tj. že by elektron „ve skutečnosti" měl přesnou polohu i hybnost, ale my je jen neuměli dost přesně změřit). Je to záležitost principiální, daná tím, že elektron je částice kvantová, a představa klasické částice s určitou přesnou polohou a rychlostí (hybností) se pro jeho popis prostě nehodí.

☺ Zdá se vám divné, že elektron nemá současně určitou polohu i rychlost? Zénónovi se naopak zdálo divné, že letící šíp v každém okamžiku někde je (má přesnou polohu), a přitom má nějakou rychlost (pohybuje se).

Přesnou analogii relace neurčitosti máme v akustice u výšky tónu (dané kmitočtem f) a času t, konkrétně doby Δt trvání tónu. Když zkracujeme dobu trvání dejme tomu komorního a^1 s kmitočtem 440 Hz, pak při době kratší než asi tak 1/80 s, kdy už zazní jen kolem 5 kmitů, se barva tónu výrazně mění, pojem výšky tónu se rozmazává (Δf roste) a zvuk vnímáme spíš jako klepnutí než jako čistý tón, který by měl neurčitost kmitočtu nulovou ($\Delta f \to 0$ pro $\Delta t \to \infty$).

Interakce mezi fermiony — a tedy obecně mezi libovolnými částicemi tvořícími hmotu — se kvantově vykládá jako výměna příslušných bosonů coby kvantových polí příslušné interakce. Podle našich znalostí existují čtyři interakce, z nichž nejslabší, ale v makrosvětě na velké vzdálenosti prakticky jediná významná, gravitační interakce, se popisuje v obecné teorii relativity zakřivením prostoru, tedy geometricky; to bohužel velice ztěžuje snahy o její úspěšné kvantování (nelineární rovnice).

Tzv. **výměnná interakce** z kvantové chemie není skutečnou interakcí, ale jen názornou interpretací principu nerozlišitelnosti kvantových částic.

Makroskopické interakce: síla klesá se vzdáleností r jako $\frac{1}{r^2}$ („zákon převrácených čtverců"), energie jako $\frac{1}{r}$.

Mikroskopické interakce: závislost energie na vzdálenosti je jiná, typu $-r\,\mathrm{e}^{-r}$, s minimem klasicky odpovídajícím rovnovážné vzdálenosti. Energie se dále exponenciálně blíží k nule, takže pro $r > 10^{-15}$ m je interakce neměřitelně slabá. Srovnání s makroskopickými silami je proto jen velmi přibližné a je jen ilustrováno „sílou", jaká by podle jednotlivých interakcí působila mezi dvěma „dotýkajícími se" protony.

jméno interakce	„síla“	dosah	zprostředkuje	např. stabilita:
gravitační	10^{-40}	makro	??? (graviton)	sluneční soustavy
elektromagnetická	10^{-2}	makro	γ (foton)	atomu
silná	10^{+1}	mikro	g (gluon)	atom. jádra; protonu
slabá	10^{-5}	mikro	W^+, W^-, Z^0	elementárních částic

„Síla“ zde porovnává energie na vzdálenost poloměru atomového jádra ($\approx 10^{-15}$ m).

Tabulka 1.1: Elementární interakce (síly)

- Elektromagnetickou interakci zprostředkují **fotony** (s nulovou klidovou hmotností, bez náboje, vektorové, se spinem ± 1);
- slabou interakci zprostředkují **bosony W** (elektricky nabité) a **Z** (elektricky nenabitý), vektorové, s hmotnostmi 80,6 GeV/c^2 a 91,2 GeV/c^2 (tedy cca stokrát těžší než proton!);
- silnou interakci mezi kvarky zprostředkují **gluony** (s nulovou klidovou hmotností, elektricky nenabité, vektorové) popsané **kvantovou chromodynamikou** QCD, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Kvantová chromodynamika;
- skalární, neutrální **Higgsův boson**{˜˜} s hmotností 125 GeV/c^2 a spinem 0 interaguje se všemi částicemi s nenulovou klidovou hmotností a „způsobuje“ jejich hmotnost.

Interakci **elektromagnetickou** a **slabou** {*weak* ˜} se podařilo sjednotit na interakci zvanou **elektroslabá**, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Elektroslabá interakce, a snížit tak počet elementárních interakcí na tři (zatím). Tzv. **Velké sjednocení** {*Grand Unified Theory*}, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Teorie velkého sjednocení, bude její spojení se silnou interakcí.

Gravitaci lze v obecné teorii relativity popsat geometrií prostoru (gravitace jako zakřivení prostoru). O její spojení se silnou a elektroslabou interakcí se snaží tzv. $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→**teorie všeho** (TOE, theory of everything), $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→**teorie superstrun** a j. Problémy: rovnice obecné teorie gravitace jsou výrazně nelineární, ale obvyklé postupy kvantování předpokládají rovnice lineární.

1.7 Standardní model elementárních částic

Podle současných představ jsou v tzv. **standardním modelu** {˜} základními prvky hmoty **fermiony**, a to tři generace dvojic **kvarků** {*quark*} a **leptonů** {˜}.

Žertovný název „kvarksismus-leptonismus“ nám pikantně připomínal tehdy posvátný a nedotknutelný marxismus-leninismus.

S první generací se setkáváme nejčastěji. Ke každé částici existuje i **antičástice** {*antiparticle*} s opačným nábojem, značka s pruhem nahoře: k **elektronu** {˜} **e** to je **pozitron** {˜} **ē**, k **neutrinu** {˜} ν antineutrino $\bar{\nu}$, a stejně u částic složených: k **protonu** {˜} **p** je antiproton **p̄** složený z antičástic k těm částicím, které by tvořily proton.

Tabulky shrnují k r. 2023 jejich značky, klidové hmotnosti m prostřednictvím energie ($m = E/c^2$, a to v MeV/c^2 $\sim$ 1,783 $\cdot\, 10^{-30}$ kg), náboje q (jednotkou je **elementární náboj** {˜ *charge*}, tj. náboj elektronu, ale s opačným znamínkem) a názvy. Hmotnost neutrin je nepatrná, není však nulová.

1. generace			
zn.	m	q	název
e^-	0,511	-1	elektron {˜}
ν_e	$< 10^{-6}$	0	e-neutrino {˜}

2. generace			
zn.	m	q	název
μ^-	105,67	-1	mion {*muon*}
ν_μ	< 0,17	0	μ-neutrino {˜}

3. generace			
zn.	m	q	název
τ^-	1 776,8	-1	tauon {˜}
ν_τ	< 18,2	0	τ-neutrino {˜}

Tabulka 1.2: Leptony

Kvarky se v přírodě nikdy nevyskytují samostatně, ale jen ve dvojicích nebo trojicích držených spolu **gluony** {˜} a **bosony W**, **Z** {˜}, a to vždy tak, aby výsledná „barva“ byla neutrální — „bílá“. „Barvy“ kvarků a gluonů (červená, zelená, modrá) jsou ovšem jen jména nemající s obvyklou optickou barvou nic společného.

Tím si také vysvětlujeme, proč známé částice, dříve pokládané za elementární, mají vesměs celočíselný náboj, a nikoli „třetinový“ náboj kvarků.

Nukleony {˜} (tvořící jádro atomu) a jiné **baryony** {˜} (těžší částice) jsou tvořeny trojicemi kvarků (**proton** {˜} p^+ = uud, **neutron** {˜} n = udd, Λ = uds). **Mezony** {˜} jsou tvořeny kvarkem a vhodným antikvarkem (např. pion $\pi^+ = u\bar{d}$).

1. generace			
zn.	m	q	název
u	2,2	+2/3	nahoru {*up*}
d	4,7	−1/3	dolů {*down*}

2. generace			
zn.	m	q	název
c	1 280	+2/3	půvabný {*charm*}
s	96	−1/3	podivný {*strange*}

3. generace			
zn.	m	q	název
t	173 100	+2/3	svrchní {*top*}
b	4 180	−1/3	spodní {*bottom*}

Tabulka 1.3: Kvarky

1.8 Filosofie a fyzika (informativní body)

1.8.1 Cesty rozvoje fyziky: indukce vs. dedukce

Indukce Konkrétní, jednotlivé zkušenosti zobecňujeme na výroky s obecnou platností. Jejich důsledky pak ověřujeme pozorováním, event. experimentem, abychom teorii potvrdili. (Nebo také: abychom teorii vyvrátili, pokud by pozorování bylo s ní v rozporu.)

Pro matematiky poznamenejme, že $\mathbf{W}_{\text{CS}}$→matematická indukce není z filosofického hlediska indukce, ale dedukce, a to z jisté vlastnosti množiny přirozených čísel. Podrobnosti viz např. $\mathbf{W}_{\text{CS}}$→Peanovy axiomy.

Příklady:

- **Johannes Kepler** z pozorování planet (které prováděl Tycho **Brahe**) induktivně odvodil své **tři Keplerovy zákony** pro pohyb planet kolem Slunce.
- Na základě pozorování pádu pozemských těles (legendární jablko) a pohybu těles „nebeských“ (Měsíc) **Isaac Newton** induktivně odvodil **Newtonův gravitační zákon** a indukcí usoudil, že v „nebeské sféře“ platí stejné zákony jako na Zemi, což byl v té době významný fyzikální i filosofický zlom.
- **Joseph J. Thomson** objevil, že katodové záření je tvořeno zápornými částicemi (elektrony) vytrženými z neutrálních atomů. Na základě indukce proto

navrhl tzv. **pudingový model atomu** {*plum pudding model*}, v němž elektrony jsou jako záporně nabité hrozinky plovoucí v kladně nabitém pudingu tvořícím atom látky, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Thomsonův model atomu. Protože se však kladně nabité α-částice po dopadu na látku občas odrazí do ostrého úhlu zpátky (experimentální vyvrácení představy řídkého kladného pudingu), vyslovil **Ernest Rutherford** domněnku (indukce), že i kladný náboj je v látce nikoli spojitě rozestřen, ale soustředěn do velmi malého jádra atomu, kolem kterého lehké a záporné elektrony obíhají; to je tzv. **planetární model atomu** {*Rutherford model*}, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}$→Rutherfordův model atomu.

Dedukce Z daného souboru zákonů (principů, v matematice z axiomů) logicky přesně odvodíme zákon nový. (Jeho případné experimentální popření pak popírá nejen nový zákon, ale i výchozí axiomy, případně postup odvození.)

Příklad:

- Z Newtonových pohybových zákonů + Newtonova gravitačního zákona lze deduktivně odvodit Keplerovy zákony, a to v obecnějším a přesnějším tvaru, než byly formulovány indukcí z pozorování, viz Dodatek A:
  1. vedle eliptických trajektorií přibudou i trajektorie parabolické a hyperbolické (např. pro komety);
  2. v ohnisku kuželosečky je nikoli Slunce, ale těžiště (hmotný střed) systému Slunce + planeta.

1.8.2 Zdůvodnění (kauzální vs. teleologické)

Kauzální (příčinné) vysvětlení: „Děje se YY (důsledek: tady a teď), ***protože*** je XX (příčina: tady a teď)“. Příčina mohla nastat i *dříve*, má-li zkoumaný objekt paměť (která udrží informaci z minulosti až do teď), případně *jinde* (přenesl-li informaci včas vhodný signál). Není však potřeba znát *budoucnost*. Příklad se šířením světla v kap. 9.2 to osvětlí opravdu zevrubně.

- Světlo (ale také částice) se na rozhraní odráží tak, že úhel odrazu = úhel dopadu. ***Protože*** v okamžiku dopadu dopadá pod jistým úhlem, tak se v následujícím okamžiku odráží pod určeným úhlem odrazu. Podobně je tomu s lomem světla.

- Částice se pohybuje, tj. mění svou ***okamžitou polohu***, pod vlivem síly (příčina, nyní) $\vec{F}$ tak, že její zrychlení $\vec{a}$ (důsledek, nyní) je rovno $\vec{a} = \vec{F}/m$. Odtud získáme ***okamžitou polohu*** $\vec{r}$ matematicky (pomocí dvojí integrace).

Teleologické (účelové) vysvětlení: „Děje se XX (teď), ***aby*** bylo dosaženo YY (cíl, v budoucnosti)“. Okamžité chování lze tedy vysvětlit jen z úvahy sahající z minulosti i do budoucna. Chování je naplánováno dopředu ke splnění jistého cíle zasahujícího i do budoucna.

- Světlo (i částice) se pohybuje před odrazem i po něm po ***takové*** trajektorii, ***aby*** se z výchozího do cílového bodu dostalo v co nejkratším čase. Mezi všemi křivkami dává v homogenním prostředí časové minimum lomená trajektorie s úhlem odrazu stejným jako úhel dopadu.

- Částice se pohybuje během intervalu od t_i do t_f po ***takové*** trajektorii $q(t)$ a ***takovou*** rychlostí $\dot{q}(t)$, ***aby*** při dodržení zákona zachování energie byla jistá veličina (zvaná akce $\mathcal{S}$) minimální (odst. 9.7.5); ta je dána integrálem

$$\mathcal{S} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t_\mathrm{f}} \mathcal{L}\Big(q(t), \dot{q}(t), t\Big)\mathrm{d}t \quad , \tag{1.2}$$

  kde lagranžián $\mathcal{L}$ je rozdíl kinetické a potenciální energie částice.

Vzájemný vztah Mezi kauzálním a teleologickým popisem není v rámci klasické fyziky filosofický rozpor, protože jak mechanika, tak optika jsou přísně deterministické a není v nich tedy prostor pro vlastní vůli. Oba výklady jsou ve svých důsledcích — jak fyzika ukazuje — ekvivalentní, a jak již bylo ostatně řečeno, fyzika jev svobodné vůle neuvažuje a nezkoumá.

Ve vědách zkoumajících *život* a připouštějících *vědomí* je naopak zpravidla přirozenější, výstižnější a kratší teleologické vysvětlení:

- Zvíře jde na lov, *aby* (v budoucnu) bylo syté.

- Motýli v březovém háji časem zbělají, *aby* (v budoucnu) unikli pozornosti predátorů.

Vysvětlení kauzální, bez vůle a cíle do budoucna, pouze s výčtem faktů ze současnosti a minulosti, případně ještě s použitím statistiky, zní těžkopádně a svou délkou odvádí pozornost jinam:

- Zvíře jde na lov, protože má (nyní) nepříjemný pocit hladu a protože má (z minula) v paměti uloženu zkušenost, že hlad přejde po úspěšném lovu.

- Motýli podléhají přirozenému výběru. Jejich tmavé mutace, na bílé kůře břízy lépe viditelné pozorujícím predátorem, mají nižší pravděpodobnost přežití než světlé. Proto po několika generacích výrazně převáží či úplně přežijí jen světlé mutace motýlů.

Kauzálně založený teoretický fyzik či matematik se o tom lépe poučí např. v úvodních kapitolách učebnic evoluční biologie, např. [6]. Připomeňme ještě, že:
* „tvrdý determinismus“ ($\mathbf{W}_\mathrm{CS}$→determinismus), který je víceméně samozřejmý v newtonovské mechanice, je neslučitelný s možností svobodné vůle;
$*$ bez svobodné vůle člověka však nelze požadovat odpovědnost a bez odpovědnosti nelze budovat a udržovat lidskou společnost.

1.8.3 Věda fenomenologická vs. fundamentální

Zde jde o porovnání disciplin studujících tytéž jevy z různých hledisek.

Příklad: při zkoumání jevů „teplo“, „teplota“ apod. je *termodynamika* onou vědou **fenomenologickou** {˜}, tedy vycházející jen z popisu těchto **jevů** {*effect*}, lat. *phaenomenon*, a ze zkoumání jejich vzájemných vztahů. Naproti tomu *molekulová fyzika* uvedené jevy vysvětluje, tedy převádí je na jevy jiné, „primitivnější“, totiž na mechanické vlastnosti a chování molekul. Zjednodušeně řečeno, makroskopickou veličinu teplotu T vykládá jako projev střední kinetické energie molekul, hustotu ρ látky pomocí středního počtu molekul v daném objemu a tlak p na stěnu jako projev středního počtu nárazů molekul na tuto stěnu dopadajících. Je tedy vůči termodynamice vědou **fundamentální**, vycházející ze základů, lat. *fundamenta*.

Po obrovských úspěších Newtonovy mechaniky v technické praxi bylo přirozené snažit se převést všechno ostatní vědění na mechaniku příslušných nejjednodušších částí systémů (odtud máme i termín „mechanismus“, nyní přenesený na rozklad jakékoli činnosti systému na jeho dílčí části a vazby těchto částí, např.: „mechanismus šíření infekce“). Světlo pokládal Newton za částečky letící prostorem. Ale i po vzniku Huygensovy vlnové teorie světla a zavedení éteru jako toho prostředí, jehož vlnění vnímáme jako světlo, se přirozeně snažili fyzikové najít *mechanismus* světelných jevů mechanistickým výkladem éteru jako pružného prostředí. Pro všechny tyto účely se jevila tehdy newtonovská mechanika tou vědou nejfundamentálnější.

Časem se ukázalo, že mechanistická interpretace éteru má již dříve zmíněné problémy: měl být tak jemný, aby bez viditelného odporu pronikal i sklo, ale přitom nesmírně tuhý, aby světlo šířící se jako chvění éteru mělo patřičnou rychlost. Pragmatičtější bylo přijmout vedle mechanických částeček — korpuskulí (lat. *corpus* = tělo, těleso, *corpusculum* = tělísko) jako nový fundamentální pojem *pole*.

A jak asi tušíte, v kvantové fyzice je to ještě jinak. Oba dosavadní fundamenální pojmy, částice i pole, v ní popisujeme stejným pojmem, totiž **kvantovým polem**{ ˜ *field*}.

Ovšem koneckonců i v té „nejhlubší vědě“ je vždy nutné něco předpokládat, z toho vycházet a na základě toho vykládat pozorované jevy.

1.8.4 Nechte *maličkých* přijíti ke mně („kvazi-infinitezimální“)

Nejprve varování: 18 g vody (1 mol) obsahuje cca $6 \cdot 10^{23}$ molekul vody, takže i kapička 50× menší než průměr vlasu, na hranici pozorovatelnosti viditelným světlem, obsahuje pořád asi 17 500 000 000 molekul.

Nepatrné, ale konečné rozměry molekul mají zajímavý matematický i logický důsledek. V matematice můžeme pracovat s **infinitezimálními** {˜} hodnotami typu posunutí $\mathrm{d}\vec{r}$ polohy $\vec{r}$, doby $\mathrm{d}t$ pro čas t a počítat rychlost $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ s následnou limitou $\mathrm{d}t \to 0$. V reálném světě se však s technikou, s měřením i s pojmem velikosti veličiny samotné zastavíme kdesi u **kvazi-infinitezimálních** {˜} velikostí veličin $\mathrm{d}\vec{r}$, $\mathrm{d}t$; podrobnosti viz odst. D.2.1 a [33].

Tyto meze jsou dané v krajním případě rozměry molekul, ale jsou občas i podstatně větší: určovat polohu rychlíku na milimetr není ani reálné (který bod rychlíku by to měl být?), ale ani potřebné.

Že to není matematicky přesné? Ale na rozdíl od matematické limity je to fyzikálně a technicky reálné, zvlášť při moderním metrologickém pojetí veličin (viz odst. D.2.3) — a o to nám tu půjde.

Dovolte mi však jako „nový termín“ uvedený v úvodu užívat pro hodnotu dQ veličiny Q slovo ***maličký*** namísto „kvazi-infinitezimální“ podle oficiální normy Electropedia [33]. Je to v řeči třikrát kratší, asi čtyřikrát méně krkolomné a znamená to přesně to, co správně tušíte i bez výkladu: hodnota tak malá, aby s ní šlo pracovat jako s diferenciálem {˜}, tj. s infinitezimální hodnotou s následnou limitou d$Q \to 0$, ale přitom hodnota tak velká, abychom nemuseli měnit model úlohy, kterou se zabýváme, např. přecházet k molekulám.

A pro jednoduchost budeme používat *maličké* hodnoty i namísto matematických **infinitezimálních**, i když je to v řeči kratší jen dvakrát.

Jak se s „*maličkými*“ pracuje a v čem se shodují s matematickými diferenciály, ukážeme detailně v odst. 4.11.1; *proč* je zavádíme a jak se o diferenciálů liší, uvidíte už na str. 52, na pojmu hustota.

1.8.5 „Co je to foton — částice nebo vlna?“

Fyzika především popisuje jevy a hledá v jevech zákonitosti. Velmi úspěšnou metodou přitom bývá **redukcionismus** {˜}. Jev popisujeme na základě modelu tím, že ho převedeme či rozložíme na souhrn jiných (jednodušších) jevů. Tak např. pohyb Země kolem Slunce převedeme s vyhovující přesností na gravitační zákon a pohybové rovnice pro dva hmotné body. (Chceme-li přesnost zvýšit, vezmeme jiný model, zahrneme další vlivy.) Redukcionismus má ovšem své meze i svá úskalí.

Vyslovíme-li otázku typu „Co je to plyn“, „Co je to hmota“, „Je foton částice nebo vlna?“, „Co je to kvark“, očekáváme úplné převedení daného objektu či jevu na objekty či jevy jednodušší. To jde celkem úspěšně u první otázky: prakticky vždycky nám stačí představa, že plyn je soubor obrovského počtu částic (molekul), které se na nejbližších vzdálenostech (menších než rozměr molekuly) silně odpuzují, na větších vzdálenostech naopak jen slabě přitahují a jsou od sebe hodně vzdáleny (řekněme 10 průměrů molekuly). U otázky na podstatu hmoty stačí fakticky jen podat výčet leptonů a kvarků a interakcí mezi nimi, i když to asi zpravidla tazatele moc neuspokojí. U třetí otázky jsou však podsunuty pouhé dva klasické modely, z nichž ani jeden nevyhovuje úplně; foton však můžeme výstižně popsat v kvantové elektrodynamice. Otázka typu „***Co je to*** kvark“ však v tomto kontextu nemá ani smysl, protože kvark není na co jednoduššího převést: „elementární částice tvořící mimo jiné protony a neutrony“. Spíš mají smysl otázky jiné: „***Jak se chová*** kvark, když …“, nebo „Co se stane s protonem (složeným ze tří kvarků), když …“.

Zjednodušující otázka typu „Co to je …“ navádí v takovém případě k elegantním, ale bezobsažným odpovědím užitím jiných vágních pojmů typu „Hmota je nesmírně zhuštěná energie“. Jenomže: Co je pak ta energie? A z čeho je ta? Jak lze tuto definici použít, co z ní lze odvodit? Lze ji vyvrátit (viz odst. 1.8.9)? Takové pseudo-odpovědi se snažte vyhnout. ☺ Alespoň nejste-li profesionální politik.

1.8.6 $E = mc^2$ aneb je hmota jen „nesmírně zhuštěná energie"?

Není. Stejně jako neusuzujeme z rovnice $s = ct$ pro dráhu s, kterou proběhlo světlo za dobu t, že by čas byl jen velice zhuštěný prostor. Ale především, m je nikoli hmota (materiál, objekt), ale hmotnost, tedy jedna z mnoha vlastností hmotného předmětu (další je třeba objem V či náboj q).

Co tedy uvedený vzorec znamená? V praxi neměříme „celou" energii systému, ale její změnu ΔE před dějem a po něm. Z Einsteinovy rovnice tedy plyne, že zvětšíme nebo zmenšíme-li energii systému o ΔE, bude mít systém také setrvačnou hmotnost o $\Delta m = \Delta E/c^2$ větší či menší a o totéž víc nebo míň bude gravitačně přitahovat jiné hmotné objekty.

1.8.7 „Fyzika je sbírka vzorečků, které stejně neplatí přesně"

To bývá jádro typických námitek studentů matematiky. Co k tomu říct?

Především to, že fyzika je spíš sbírka *idejí*; každý vzoreček je jen matematickým popisem modelu, který tu ideu více či méně vystihuje.

Proč ale aspoň ty vzorečky neplatí vždycky přesně? To je pro fyzika naopak spíš přednost. *Přesný* popis pokusu by logicky vzato musel *přesně* zahrnout všechny jevy, které se kolem pokusu vyskytují, tedy od úrovně velikosti atomů předmětu, který zkoumáme, do vzdálenosti například stopadesáti miliónů kilometrů, pokud vám do pracovny svítí Slunce.

Umění *rozumět* fyzice zahrnuje umění zjednodušit úlohu tak, abychom ji už uměli vyřešit, ale přitom aby stále vystihovala to, co nás zajímá. Není tedy přesná v matematickém slova smyslu, ale zjistí nám s dostatečnou přesností to, co skutečně potřebujeme. Vzpomeňte na to třeba v kap. 5.5.

☺ Bonmot „Teoretický fyzik je matematik, který ví, co může zanedbat" to vystihuje dobře.

1.8.8 Deterministický chaos — není to protimluv?

Není. Chaos je nepořádek, tedy nemožnost nalezení jednoduchého popisu v daném modelu. Může ale existovat model jiný, v němž popis jednoduchý je. V posloupnosti

$$x = 0{,}285\,714\,285\,714\,285\,714\,285\,714\,285\,714\,285\,714\,285\,714\,285\,714\,285\,714\ldots$$

vidíme ihned pravidlo: číslice se opakují ve skupině po 6 číslicích. Toto číslo také zobrazíme snadno jako podíl dvou malých celých čísel, $x = 2/7$.

Zato posloupnost číslic

$$y = 0{,}534\,522\,483\,824\,848\,769\,369\,106\,961\,759\,507\,043\,108\,002\,829\,682\,675\,278\ldots$$

vypadá složitěji a asi bychom ji prohlásili za chaotickou. Přesto je dána jednoduchým pravidlem: je to odmocnina předchozího čísla, $y = \sqrt{x} = \sqrt{(2/7)}$.

1.8.9 Co s rozpory

Popper vysvětluje, že teorie, která má mít smysl, musí být **vyvratitelná** neboli zpochybnitelná {*falsifiability*}, $\mathbf{W}_{\mathrm{CS}}\to$**falzifikovatelnost** teorie. To znamená, že musí být možno formulovat pozorování nebo pokus, který by mohl dopadnout jinak, než teorie předpokládá. Pokud opravdu tento pokus provedeme a on dopadne jinak, pak jsme se zřejmě mýlili buď v teorii, nebo v provedení či vyhodnocení pokusu.

Teorie, že elektron není kulatý, ale dejme tomu krychlový nebo tyčinkový, by byla v principu vyvratitelná vyhodnocením směru letů částic po strážce dvou elektronů. Teorie, že elektron není úplně poznatelný, vyvratitelná není. Ale také nemá žádný rozumný přínos k poznání.

Rozpory teorie a přístup k nim:

- Rozpor teorie s praxí:

– revize měření (Tým OPERA v listopadu 2011 naměřil rychlost neutrin větší než světelná rychlost; šlo však o omyl ve vyhodnocení experimentu, jak potvrdil týž tým v r. 2012);

– revize toho, která teorie a jak byla použita (např. příliš zjednodušený model);

– revize teorie samé (rozbor Michelsonova-Morleyova pokusu vedl ke vzniku teorie relativity).

- Vnitřní rozpory a nekonzistence teorie:

  Neměly by být, ale proces poznávání je opravdu obtížný. Občas jsou známa „bolavá místa“ teorie, kde jistá pragmatická nekonzistentnost je nejjednodušším (příp. jediným) řešením. Tak v předkvantové chemii byl rozpor v chování stabilního benzenu popsaného jako vysoce nenasycený cyklohexatrien se třemi dvojnými vazbami v uhlíkovém cyklu; teprve kvantová mechanika vysvětlila jeho stabilitu pomocí úplné delokalizace π-elektronů vytvářejících tyto vazby. Podobně o historickém Bohrově modelu vodíku se žertem říkávalo, že podle něj se počítá jedním způsobem v pondělí, středu a pátek, jiným způsobem v úterý, čtvrtek a sobotu, zatímco v neděli se nepočítá.

1.8.10 Shrnutí

Víme toho na jednu stranu překvapivě mnoho, ovšem zdaleka ne ani to, co bychom dost naléhavě potřebovali. To je samozřejmě docela dobře — je to šance pro mladé fyziky, ale i pro matematiky: Nobelovovu cenu za fyziku dostal v roce 1961 matematik Mössbauer za rezonanční absorpci γ-záření a s ní spojený jev po něm nazvaný.

2 Základní matematické a fyzikální pojmy

2.1 Úvodem

Celá tato kapitola je, až na užití kalkulu a malá rozšíření, spíše přehled pojmů a termínů známých ze SŠ. Zde jsou připomenuty, případně přesně pojmenovány podle norem; klademe však důraz na fyzikální *představy*. Výklad je hlavně tam, kde v praxi bývají nejasnosti.

Pro rozšíření fyzikálních představ lze vedle standardní učebnice VŠ fyziky [8] využít i každé učebnice teoretické mechaniky ze seznamu literatury na konci.

2.2 Typické matematické pojmy v různých přístupech

2.2.1 Matematické značky (nikoli symboly)

Dle normy [26] užíváme následující značky:
přibližná rovnost: $\pi \approx 3{,}14$;
totožnost: $\frac{1}{2} \equiv 1/2$;
definice: $D := b^2 - 4ac$;
„odpovídá“: $1\,\mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 5\,\mathrm{kg}$;
funkce: $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$; $\arcsin, \arccos, ..$; $\sinh, \cosh, ..$; $\operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}, ..$;
$\log_a$, $\ln \equiv \log_{\mathrm{e}}$, $\lg \equiv \log_{10}$, $\mathrm{lb} \equiv \log_2$; $\mathrm{Re} \equiv \Re$, $\mathrm{Im} \equiv \Im$, $\arg$, sgn.
A poznamenejme, že podle normy jde o matematické *značky* (v těsném, jednoznačném spojení s objektem), nikoli *symboly* (ve volném spojení).
Značkou {*symbol*} české měny je CZK mezinárodně, Kč v ČR.
Symbolem {*symbol*} české státnosti je (zpravidla) lev, odrůda dvojocasý.

Nenechte se strhnout angličtinou, která je zde chudší a mezi značkou a symbolem nerozlišuje. Angličtina si to vynahradí jinde, kde naopak češtině chybí jednoslovné vyjádření, např.: rychlost (mechanika){*velocity*} $\vec{v}$, rychlost (dopravní předpisy) {*speed*} $v = |\vec{v}|$, rychlost (jinde, třeba rychlost růstu krystalu) {*rate*}.

2.2.2 Proměnná, funkce, parametr, konstanta

Tyto termíny se používají ve fyzice stejně jako např. v matematické analýze.

Proměnná {*variable*} je veličina nabývající určitou **hodnotu** {*value*}, zpravidla číselnou {*numerical ˜*}, někdy logickou {*logical ˜, Boolean ˜*} apod. Tato hodnota se může podle okolností měnit.

Nezávislou proměnnou {*independent variable*} bývá zpravidla čas, nebo taková veličina, kterou můžeme sami v experimentu ovládat či zadávat. Je to vymezení subjektivní a závisí na struktuře pokusu. (Může to být např. velikost F síly, kterou natahujeme měřenou ocelovou pružinu.)

Závislá proměnná {*dependent variable*} je veličina, jejíž hodnota se obecně mění v závislosti na hodnotách ostatních veličin (např. délka l té natahované pružiny). Matematicky vzato je to **funkce** {˜} těchto veličin.

Parametr {˜} je veličina, zpravidla volitelná nebo nastavitelná, jejíž hodnota se během studovaného jevu nemění (např. teplota T oné natahované pružiny). Při dalším měření může však mít jinou hodnotu.

Konstanta{˜}, často **materiálová konstanta**{˜˜} je veličina za daných okolností neproměnná (např. pružnost ocele té pružiny za dané teploty).

Univerzální konstanta{˜˜} je „přírodní“ konstanta neměnící se za žádných okolností, např. světelná rychlost c, str. 11.

Konvenční konstanta je dohodou stanovená přesná hodnota veličiny. Např. Avogadrova konstanta N_{A} usnadňuje přechod z mikrosvěta obrovského počtu částic do makrosvěta tam, kde je podstatný *poměr* počtu jednotlivých druhů částic, spíš než počet sám. Podobně *normální tíhové zrychlení* g_{n} usnadňuje zápis a porovnání skutečných tíhových zrychlení v různých místech.

Invariant (vůči jisté transformaci) je veličina, která se touto transformací nemění. Např. elektrický náboj či doba děje při Galileově transformaci nebo elektrický náboj či světelná rychlost při Lorentzově transformaci.

2.2.3 Vektorová (newtonovská) mechanika

Připomeňme, že **vektorový** počet {*vector algebra*} i **infinitezimální** počet (limita, derivace, integrál — „kalkul“) {*calculus*} vznikaly a vyvíjely se souběžně s mechanikou a ve svých počátcích byly vytvořeny víceméně „na zakázku“ pro ni. Obrázky vedle textu v následujících odstavcích nám mají jen *velmi hrubě* připomenout to, co znáte zcela přesně z kalkulu v matematické analýze: derivaci a integrál (Riemannův, jednorozměrný).

10 Základy speciální teorie relativity

10.1 Motivace

Základy speciální teorie relativity jsou zde vysvětleny pro současného čtenáře běžně používajícího techniku mající přesnost před sto lety nepředstavitelnou.

Proto neklademe příliš důraz na rozbor historických (byť geniálně vymyšlených) postupů a např. namísto rozboru Michelsonova-Morleyova pokusu začínáme jeho výsledkem: „Naměřená rychlost světla nezávisí na směru letu světla, ani na rychlosti jeho zdroje — ve sporu s teorémem skládání rychlostí“. (Podrobnější rozbor tohoto pokusu ovšem uvedeme taky, ale až později, v odst. 10.6.8.)

Samotné slovo *soustava* znamená v celé této kapitole *inerciální vztažnou soustavu*, str. 221.

10.1.1 Co je a co není teorie relativity

Speciální teorie relativity {˜} (**STR** {˜}) mění velmi podstatně naše pojímání **prostoru** {*space*} a **času** {*time*}. Zejména v oblasti velmi vysokých rychlostí (srovnatelných se světelnou rychlostí, str. 11) se totiž při měření ukazuje, že prostor a čas nejsou nezávislé pojmy, ale souvisejí spolu natolik úzce, že je výstižnější chápat je spolu jako nový pojem **prostoročas** {*spacetime*} a studovat jeho vlastnosti. STR tuto souvislost vystihuje a popisuje tak **relativistické jevy** {˜ *effect*} lišící se od klasických. Přechod od jedné inerciální vztažné soustavy ke druhé podle STR již není popsán Galileovou transformací, odst. 3.6.2, ale transformací Lorentzovou, kap. 10.4; ta je symetričtější v souřadnicích (prostorových a časové) než Galileova.

Jak již bylo řečeno, termín **časoprostor** {*time-space*} měl týž význam.

STR spojuje *setrvačnou hmotnost s energií* známým Einsteinovým vztahem $E = mc^2$ (viz však odst. 1.8.6). Gravitační hmotností a gravitačním zákonem se STR nezabývá. Toto studuje až **obecná teorie relativity** {*general* ˜} (**OTR**, též **GTR** {˜}) spolu s popisem v neinerciálních soustavách. Rovnost hmotnosti setrvačné a gravitační pak využívá k jejich společnému popisu hmotnosti zakřivením prostoročasu. Zde však OTR nerozebíráme.

Ostatní představy a pojmy klasické mechaniky (např. částice, pole, síla) však zůstávají v STR v platnosti, dokonce i v tom smyslu, že při opatrné formulaci platí i nadále všechny tři pohybové zákony Newtonovy, tedy základ klasické mechaniky, používáme-li během práce pouze jedinou vztažnou soustavu. Např. 2. Newtonův zákon (zákon síly) platí ve znění „V inerciální soustavě je časová změna hybnosti hmotného bodu rovna výsledné síle na něj působící“.

STR je plně kompatibilní (slučitelná) s *teorií elektromagnetického pole*. Připomeňme, že teorie elektromagnetického pole *není* kompatibilní s klasickou nerelativistickou mechanikou, konkrétně s Galileovou transformací. Úzké vztahy mezi elektrickou intenzitou $\vec{E}$ a magnetickou indukcí $\vec{B}$ jsou vystiženy jejich společným popisem pomocí tenzoru elektromagnetického pole. Transformační vlastnosti tohoto pole (Lorentzova transformace) totiž vyhovují představě sjednoceného prostoročasu, nikoli však představě prostoru samostatného, na čase nezávislého (Galileova transformace).

10.1.2 Důvod pro STR: nyní, začátkem 21. století

Na rozdíl od konce 19. století, kdy se začala problematika STR vynořovat spolu s měřením rychlosti světla, dnes není problém měřit doby vysoce přesně: běžné cesiové hodiny v satelitech pro GPS mají přesnost $1 : 10^{15}$, tj. 1 sekunda za skoro 32 milionů let. ☺ A to ještě z toho počtu by bylo dobrých osm milionů roků přestupných!

Z měření plyne, že ve dvou inerciálních soustavách pohybujících se vůči sobě se zachovává nikoli *současnost* ($\Delta t = 0$) dvou prostorově ($\Delta x \neq 0$) od sebe vzdálených událostí (tj. formálně nekonečně velká rychlost, $v = \Delta x/\Delta t = \infty$), ale jistá *konečná rychlost* — rychlost světla ve vakuu neboli krátce **světelná rychlost** {*luminal speed*}, zhruba 300 000 km/s (str. 11). Světlo má tedy ve vakuu touž rychlost c v každé inerciální soustavě a Galileův způsob skládání rychlostí prostým sčítáním rychlostí nemůže platit přesně. Toto lze mít za experimentálně ověřené. Jak to změní klasickou mechaniku?

Připomeňme, že posuvná rychlost Země při jejím oběhu kolem Slunce je cca 30 km/s, takže rychlost Země vůči Sluneční soustavě na jaře a na podzim se liší o 60 km/s. Rychlost světla ze Siria měřená na Zemi je však v různých ročních obdobích stejná, navíc stejná jako rychlost světla ze Slunce nebo žárovky na Zemi. A určitě nelze předpokládat, že je Sirius vůči Zemi v klidu.

10.1.3 ↩Důvod pro STR v době jejího vzniku

Spěcháte-li, přeskočte tento odstavec a čtěte rovnou kap. 10.2.

Výchozí situace Fyzikální discipliny, kterých se STR dotýká, jsou jednak mechanika hmotného bodu a systému hmotných bodů, jednak teorie pole, konkrétně elektromagnetického.

Gravitační pole studuje až OTR a jiné silové pole nebylo tehdy známo. Kontaktní síly a síly pružnosti či pevnosti materiálů jsou vázány na konkrétní objekt a jejich studium z hlediska pohybující se soustavy ztrácí bezprostřední smysl. Podobně termodynamika se zabývá rovnovážným stavem systému velkého počtu částic; studium takového systému z pohybující se vztažné soustavy naráží na principiální otázku rovnovážného stavu mezi měřeným systémem a měřicím přístrojem, které by se navzájem pohybovaly.

Klasická mechanika je koncem 19. století už detailně rozpracována nejen ve formě vektorové (newtonovské), ale i ve svých vyšších partiích — v analytické mechanice, jako je Lagrangeův a Hamiltonův formalismus. Zůstává však stále Newtonova představa existence absolutního prostoru a absolutního času, v němž platí zcela přesně Newtonovy zákony; jemu se pouze přibližují vztažné soustavy námi realizované. Ale již Galileo věděl dříve než Newton, že zákony mechaniky, které platí např. ve vztažné soustavě spojené s klidným mořem, a tím i se Zemí, mají stejný tvar i ve vztažné soustavě spojené s lodí, která se po moři pohybuje rovnoměrně přímočaře. Je tedy obráceně zřejmé, že *mechanickými* pokusy *nelze* zjistit, zda daná vztažná soustava je oním absolutním prostorem a časem, anebo zda se vůči němu pohybuje rovnoměrně přímočaře (tj. zda je „jen“ inerciální, viz dále, str. 221).

Teorie elektromagnetického pole je také prakticky hotova. Na podkladě zejména Faradayových pokusů a jejich matematického zpracování Maxwellem a řadou dalších vynikajících fyziků se v ní podařilo sjednotit po dlouhou dobu samostatné obory — nauku o elektřině, o magnetismu a optiku. Elektromagnetické pole popsané Maxwellovými rovnicemi bylo interpretováno stylem mechaniky jako vnitřní pnutí speciálního vše prostupujícího prostředí, nazvaného **éter** {*aether*}. Elektrická intenzita $\vec{E}$ byla tedy intenzitou vnější síly způsobující deformaci éteru a elektrická indukce $\vec{D}$ popisovala místní posunutí éteru, srv. její dosavadní anglický název „electric displacement“ a značka $\boldsymbol{D}$, i starý český název „elektrické posunutí“. Bylo by logické předpokládat, že éter je v klidu vůči absolutnímu prostoru.

Éter vs. absolutní prostor a čas Tím, jak popsat éter ze soustavy, která se vůči němu pohybuje, se zabývali špičkoví fyzikové té doby jako H. A. Lorentz, G. FitzGerald, O. Heaviside, J. Larmor, J. H. Poincaré, W. Voigt. Hledali zejména takové *transformace* (tedy rovnice popisující přechod mezi různými vztažnými soustavami), při nichž by Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické pole zachovávaly svůj tvar, a dále hledali *invarianty — veličiny*, které by při těchto transformacích zachovávaly svou velikost (byly vůči této transformaci invariantní).

Ukázalo se však, že Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické pole nejsou slučitelné s Galileovou transformací z klasické mechaniky. Plynou z nich totiž pro pole vlnové rovnice, podle nichž má světlo ve vakuu konkrétní rychlost, zvanou nyní stručně termínem **světelná rychlost** {*luminal speed*}:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s} \quad . \tag{10.1}$$

Je to přesná hodnota, a to proto, že je tím nyní definován metr pomocí sekundy. Norma stanoví značku c pro rychlost světla v obecném prostředí a c_0 pro vakuum; povoluje však i pro vakuum c tam, kde nehrozí nedorozumění. Dále proto užíváme, jak je v STR i OTR běžné, pro světelnou rychlost prosté c.

Protože podle Galileovy transformace se rychlosti při přechodu mezi vztažnými soustavami sčítají, dává to možnost z „kandidátů na absolutní prostor" vyloučit ty vztažné soustavy, v nichž by měla naměřená hodnota světelné rychlosti hodnotu jinou. Otázka nalezení soustavy, vůči níž je éter v klidu, se stala aktuální, a byla řešitelná principiálně i prakticky: stačilo měřit dost přesně rychlost světla.

Řešení rozporů s newtonovskou mechanikou H. Lorentz nalezl r. 1894 transformaci (kterou jeho jménem nazval Poincaré r. 1905), vůči níž jsou Maxwellovy rovnice invariantní, tj. zachovávají svůj tvar. Liší se ovšem od Galileovy transformace vyhovující newtonovské mechanice. FitzGerald r. 1889 a Lorentz r. 1892 ukázali, že nesouhlas Michelsonova-Morleyho experimentu s teorií by šlo vyřešit předpokladem, že předmět pohybující se vůči éteru se zkracuje (**kontrakce délek**, viz str. 235) při principiálním zachování Newtonova pojetí. Dalším rozborem teorie elektromagnetického pole došli však ke zjištění, že je nutno předpokládat, že v pohybující se soustavě kromě kontrakce délek také plyne čas pomaleji (**dilatace času**, viz str. 238), aby šlo vysvětlit např. pokus Kennedyův-Thorndikův (viz odst. 10.6.8). I když zejména druhý jev vážně narušoval Newtonovu koncepci absolutního prostoru a času, předpokládali fyzikové stále existenci éteru a uvedené jevy pokládali za vlastnost hmoty. Teprve Einstein v r. 1905 si jako první uvědomil, že jde nikoli o vlastnost hmoty (z níž byly vyrobeny měřicí přístroje), ale o *vlastnost prostoročasu*, tj. propojeného prostoru a času, jimiž fyzikální děje popisujeme.

10.2 Klasické pojetí času a prostoru (připomenutí)

Celá kap. 10.2 jen opakuje klasické představy a spěcháte-li moc, můžete ji přeskočit. Vřele však doporučujeme připomenout si teď grafický popis událostí a dějů podle odst. 3.6.3.

10.2.1 Vztažná soustava; synchronizace hodin

Z praktických důvodů zavedeme zatím zcela formálně 4D **prostoročas** sjednocující geometrický 3D prostor a 1D čas, které popisujeme ve **vztažné soustavě** {*frame*}. Tou „správnou" soustavou $\mathcal{S}_0$ je Newtonův *absolutní prostor* s kartézskou soustavou souřadnic x, y, z, doplněný *absolutním časem* — 1D časovou souřadnicí t. Jimi měřeno platí 1. Newtonův zákon (tj. volný hmotný bod se pohybuje bez zrychlení, viz str. 78, „lex inertiæ“). Každou vztažnou soustavu, v jejichž souřadnicích prostorových a časových tento zákon platí, nazveme **inerciální** (dále jen IS); příkladem je právě $\mathcal{S}_0$.

Inerciální soustavou je ovšem i každá jiná soustava $\mathcal{S}$, která se vůči $\mathcal{S}_0$ pohybuje rovnoměrně přímočaře, protože i v ní zjistíme u volného hmotného bodu nulové zrychlení. Jednu takovou soustavu $\mathcal{S}$, která se nám bude zvláště líbit (např. my budeme vůči ní v klidu) nazveme pro zjednodušení popisu „stojící“, „klidnou“ apod. Druhá, „pohybující se“ soustava $\mathcal{S}'$ nechť se vůči $\mathcal{S}$ pohybuje stálou rychlostí $\vec{v}$; jak víme, je tedy rovněž inerciální. Pro jednoduchost v obou soustavách orientujeme osy $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ ve směru pohybu této druhé soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$. Přechod mezi $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}$ je v klasické mechanice popsán Galileovou transformací, odst. 3.6.2 a 10.2.6.

Je téměř samozřejmé, že v rámci každé jednotlivé inerciální soustavy jsou hodiny navzájem **synchronizované** {˜}, tj. všechny hodiny v ní ukazují v libovolný okamžik tentýž časový údaj, který ovšem může být v jiné IS jiný (na Zemi např. údaje z jiného časového pásma).

Občas budeme však nějakou soustavu podezírat z toho, že jsou v ní hodiny **rozsynchronizovány**, když jim tam totiž budou z našeho hlediska současně ukazovat různé hodiny na různých místech různé časy. („Moji Pražané mi rozumějí.“)

10.2.2 Událost; interval; odlehlost

U důležité události zaznamenáváme *místo* (prostorový údaj, $\vec{r}$) a *okamžik* (časový údaj, t), kdy k ní došlo: v dotazníku např. zapisujeme místo a den svého narození. V teorii relativity se termín **událost** {*event*} $\mathrm{U_A}$ užívá pro pouhé určení prostorového a časového údaje, a to bodového, tj. dvojice údajů $\{\vec{r}_\mathrm{A}; t_\mathrm{A}\}$, kde a kdy nastal dotyčný jev (výbuch supernovy, zhasnutí žárovky, setkání dvou pohybujících se bodů). V prostoročase zobrazíme událost $\mathrm{U_A}$ bodem A, tedy $\mathrm{U_A} \mathrel{\widehat{=}} \mathrm{A} \equiv \{\vec{r_\mathrm{A}}; t_\mathrm{A}\}$.

Rozlišovat mezi událostí $\mathrm{U_A}$ a jejím zobrazením A v prostoročase je potřeba tehdy, když studujeme různé grafické zápisy událostí. Běžně se však $\mathrm{U_A}$ od A nerozlišují a i zde budeme prostě pro stručnost mluvit většinou o „události A“.

U události se ovšem omezíme na jevy, které lze dostatečně přesně lokalizovat prostorově i časově, aby šly zobrazit opravdu bodem. Počátek $\mathrm{O} = \{\vec{0}; 0\}$ soustavy $\mathcal{S}$ odpovídá v tomto smyslu také jisté „události“ $\mathrm{U_O}$: od ní začínáme v soustavě $\mathcal{S}$ měřit prostor i čas.

K plné informaci je ovšem potřeba zadat vztažnou soustavu, v níž polohu a okamžik určujeme: pasažér ve vlaku z Moskvy bude určovat události polohou vůči svému místu v rychlíku (např.: „metr přede mnou“) a časem vůči ČR posunutým o 2 hodiny dopředu. Údaje $\vec{r}\,'$, t' vztažené k jiné soustavě $\mathcal{S}'$ odlišíme též čárkou u závorky: $\{\vec{r}\,'; t'\}'$, např. $\{\vec{0}; 0\}'$ je počátek soustavy $\mathcal{S}'$, zatímco $\{\vec{0}; 0\}''$ je počátek jiné soustavy $\mathcal{S}''$, apod.

Souřadnice událostí $\{x_k; x_0\}$ jsou v této kapitole psány pro jednotnost podle odst. 2.3.2 vždy ve *složených* závorkách { } a odděleny středníkem; v odborné literatuře se zpravidla pro jednoduchost používají obyčejné ( ), odděluje se čárkou nebo ničím apod.

Dvojice událostí U_A, U_B vymezuje **interval** — množinu událostí zobrazitelnou úsečkou AB v prostoročase (viz však odst. 10.5.2). Pro interval U_A U_B zavedeme veličiny a termíny

- **prostorová odlehlost** pro rozdíl $\Delta s_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$ bez ohledu na t_A a t_B, a podobně
- **časová odlehlost** pro rozdíl $\Delta t_{AB} = |t_A - t_B|$ bez ohledu na $\vec{r}_A$ a $\vec{r}_B$.

Proč *odlehlost*? Protože je neutrální. Slovo *vzdálenost* by příliš připomínalo délku, a ne dobu. ☺

10.2.3 Současnost a soumístnost; relativní a absolutní

Řekneme, že dvě události U_A, U_B zobrazené body A, B se souřadnicemi $\{\vec{r}_A; t_A\}$ a $\{\vec{r}_B; t_B\}$ měřenými v některé vztažné soustavě $\mathcal{S}$ jsou v této soustavě

- **současné**, je-li $t_A = t_B$ (mají-li časovou odlehlost nulovou, $\Delta t_{AB} = 0$);
- **soumístné**, je-li $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ (mají-li prostorovou odlehlost nulovou, $\Delta s_{AB} = 0$).

V logice budeme namísto slova „*současně*" raději užívat slovo „*zároveň*", nepůjde-li o bezprostřední vztah k času. Jejich „záměna" je podstatou některých „paradoxů" STR.

Veličinu nazýváme

- **absolutní**, jestliže její hodnota *nezávisí* na volbě vztažné soustavy použité pro popis a měření této veličiny (např. elektrický náboj);
- **relativní**, jestliže její hodnota na této volbě *závisí* (např. rychlost).

Toto kriterium nesouvisí s dělením na subjektivní (vjem) a objektivní (měření).

Současnost je v klasické mechanice *absolutní*: jestliže nastanou dva výbuchy současně na začátku i konci jedoucího vlaku, pak nastaly současně jak vůči vlaku, tak i vůči Zemi.

Soumístnost dvou událostí je však *relativní*, tj. závisí na volbě vztažné soustavy užité při popisu. Objednám-li si (U_A) v jídelním voze u stolku kávu a po chvíli ji zaplatím (U_B), pak objednání a zaplacení nejsou současné (ani z hlediska vlaku, ani Země). Události U_A, U_B jsou soumístné z hlediska vlaku (u téhož stolku, jejich prostorová odlehlost je tedy ve vlaku nulová), nikoli však z hlediska Země (vlak zatím projel dlouhý úsek). Soumístné v *obou* vztažných soustavách by U_A, U_B byly jenom buď tehdy, kdyby se soustavy vůči sobě nepohybovaly (kdyby vlak stál), nebo kdyby U_A, U_B byly vedle soumístnosti i současné — tj. kdyby se vlak nestačil mezi oběma událostmi U_A, U_B vůči Zemi posunout.

I v teorii relativity bude soumístnost relativní: dvě události v jedné soustavě soumístné, ale nesoučasné, nebudou soumístné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první.

Relativní se však stane i současnost: dvě události v jedné soustavě současné, ale nesoumístné, nebudou současné vůči jiné soustavě, pohybující se vůči první. Bude to tedy — paradoxně — symetričtější. A také bude pravda, že dvě události $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_B}$ zároveň současné i soumístné v jedné soustavě $\mathcal{S}$ jsou současné a soumístné i v každé jiné soustavě $\mathcal{S}'$ (jim příslušné body A, B tedy splývají).

10.2.4 Synchronizace vztažných soustav navzájem

Při sledování dvou různých soustav $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ se nám zjednoduší popis, budeme-li tyto soustavy **navzájem synchronizovat** {˜}: prostoročasový počátek $\mathrm{O} = \{\vec{0}; 0\}$ soustavy $\mathcal{S}$ zavedeme tak, aby byl i počátkem $\mathrm{O}' = \{\vec{0}; 0\}'$ soustavy $\mathcal{S}'$ (srv. str. 67).

Není to žádný problém: pokud by počátku $\{\vec{0}; 0\}$ odpovídala v původní $\mathcal{S}'$ nějaká nenulová hodnota $\{\vec{r}_0{}'; t_0'\}'$, pak tuto hodnotu odečteme od každého údaje v $\mathcal{S}'$, a dostaneme tím novou soustavu $\mathcal{S}''$, synchronizovanou: $\vec{r}\,'' = \vec{r}\,' - \vec{r}_0{}'$, $t'' = t' - t_0'$.

10.2.5 Speciální 2D vztažná soustava; speciální transformace

Směry $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, resp. $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ jsou k směru pohybu $\mathbf{x}$ kolmé a zpravidla se o ně nebudeme zajímat; pak nám stačí **speciální 2D prostoročas** s 2D soustavami $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ a **speciální transformací** {˜} mezi nimi, tj. mezi $\{x; t\}$ a $\{x'; t'\}'$.

Toto použití termínu „speciální“ *nesouvisí* s termínem *speciální* vs. *obecná* teorie relativity.

10.2.6 Speciální Galileova transformace

Zjednodušme si výklad a popis tím, že orientujeme osu $\mathbf{x}$ v tom směru, ve kterém se koná pohyb a uvažujeme jen speciální 2D vztažné soustavy; $\mathcal{S}'$ se vůči $\mathcal{S}$ pohybuje rychlostí v (proměnnou u si ponecháme pro rychlost sledovaného bodu). Jak pro událost $\mathrm{U_A}$ určíme její souřadnice $\{x'; t'\}'$ v $\mathcal{S}'$, známe-li její souřadnice $\{x; t\}$ v $\mathcal{S}$?

Přímá transformace Při synchronizaci počátků má transformace tvar

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \,, \\ t' &= t \,. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Inverzní transformace ke speciální Galileově transformaci rov. (10.2) může být samozřejmě nalezena triviálním vyřešením soustavy těchto dvou lineárních rovnic vůči neznámým x a t, tedy

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \,, \\ t &= t' \,. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Můžeme ji však najít i „fyzikálněji“, a toto si hluboce rozvažte: z principu relativity plyne, že inverzní transformace musí mít stejný tvar jako přímá — bude tedy opět Galileovou transformací, v níž jen zaměníme t za t', dále x za x', a konečně rychlost v soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ za rychlost $v' = -v$ soustavy $\mathcal{S}$ vůči $\mathcal{S}'$.

Pokud by soustavy $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}$ nebyly navzájem synchronizovány a počátek $\mathcal{S}'$ měl souřadnice $\mathrm{O}' \equiv \{0;0\}' = \{x_0;t_0\}$, pak by rov. (10.2), resp. (10.3) měly tvar

$$\begin{aligned} x' &= (x - x_0) - v(t - t_0) \ , \\ t' &= (t - t_0) \ , \end{aligned} \tag{10.4}$$

resp.

$$\begin{aligned} (x - x_0) &= x' + vt' \ , \\ (t - t_0) &= t' \ . \end{aligned} \tag{10.5}$$

10.2.7 Měření dob a délek

Relativita prostorové odlehlosti Pozorujme meteorit, který se někde někdy rozežhavil a *začal svítit* (událost $\mathrm{U_A}$), a poté jinde a jindy se vypařil a tím *zhasl* (událost $\mathrm{U_Z}$); pro jednoduchost nechť mezitím letěl *rovnoměrně přímočaře* rychlostí $\vec{v}$ vůči Zemi, s níž spojíme inerciální soustavu $\mathcal{S}$ s osou $\mathbf{x}$ ve směru letu meteoritu. Zajímá nás jednak *délka* trajektorie čili délka dráhy, jakou meteorit urazil; to je prostorová odlehlost $\Delta s_{\mathrm{AZ}} = |\vec{r}_{\mathrm{Z}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}| = x_{\mathrm{Z}} - x_{\mathrm{A}}$. Dále nás zajímá *doba*, po jakou svítil, což je časová odlehlost $\Delta t_{\mathrm{AZ}} = t_{\mathrm{Z}} - t_{\mathrm{A}}$. Protože samy *hodnoty* prostorových i časových údajů událostí $\mathrm{U_A}$ i $\mathrm{U_Z}$ závisejí na volbě vztažné soustavy, zajímá nás také, do jaké míry na této volbě závisejí délka a doba zkoumaného děje, tj. prostorová a časová *odlehlost* mezi dvěma událostmi. S meteoritem spojíme inerciální soustavu $\mathcal{S}'$ s osou $\mathbf{x}'$ rovnoběžnou s $\mathbf{x}$, podél níž v $\mathcal{S}$ meteorit letí.

Letí-li meteorit po dobu Δt_{AZ} vůči Zemi, pak ve své vlastní inerciální soustavě (v níž je v klidu) letí dobu $\Delta t'_{\mathrm{AZ}} = t'_{\mathrm{Z}} - t'_{\mathrm{A}}$. Z transformačních rovnic plyne triviálně $\Delta t_{\mathrm{AZ}} = \Delta t'_{\mathrm{AZ}}$. V klasické mechanice je tedy *doba děje* (časová odlehlost událostí $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_Z}$) *absolutní*, tj. nezávisí na volbě vztažné soustavy; je invariantem Galileovy transformace.

Snadno však nahlédneme, že *délka intervalu* coby prostorová odlehlost Δs_{AZ} mezi dvěma událostmi $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_Z}$ v různých okamžicích t, t' je *relativní*, tj. na volbě vztažné soustavy *závisí*. Meteorit v soustavě $\mathcal{S}'$ spojené s ním samým je ovšem v klidu (má tedy rychlost $u' = 0$), takže dráha $\Delta s'_{\mathrm{AZ}} = u'\Delta t$, po které svítí, je pro něho samotného nulová. V soustavě $\mathcal{S}$ spojené se Zemí však urazí meteorit nenulovou dráhu Δs_{AZ}, v našem případě rovnoměrného pohybu $\Delta s_{\mathrm{AZ}} = u\Delta t_{\mathrm{AZ}}$.

Délka d tyče je **prostorová odlehlost** jistého intervalu: jako jednu událost ($\mathrm{U_A}$) zvolíme zřejmě začátek tyče v jistém okamžiku t_{A}, jako druhou událost ($\mathrm{U_Z}$) konec téže tyče v jistém okamžiku t_{Z}. Pokud se tyč nepohybuje vůči soustavě, v níž měříme, můžeme její kraje měřit kdykoli. Pokud se však *pohybuje*, musíme změřit oba její kraje *současně*, tedy v tentýž okamžik: $t_\mathrm{A} = t_\mathrm{Z}$, jinak nám mezi měřeními tyč o kousek „podjede pod rukama“. To je zajímavý detail: i v klasické mechanice potřebujeme pro změření délky pohybujícího se předmětu také alespoň dvoje hodiny, a to navzájem synchronizované. Prakticky to lze provést např. takto:

Máme změřit délku jedoucího rychlíku (šipka nahoře) v čase $t = 3\,\mathrm{h}$; jede zleva doprava neznámou a nezajímavou rychlostí u. Rota složená z vojáků „o“ stojících podél trati dostane povel, aby přesně ve 3 hodiny zvedl ruku ten voják „B“, u kterého bude příď rychlíku, a předpažil ten voják „A“, u kterého bude ve 3 hodiny záď rychlíku. Poté co přejede vlak, bude vypadat situace takto:

```
................|=======>...............
........ooooooooAoooooooBooooooo........
```

Nyní stačí v klidu změřit vzdálenost vojáků A, B. Je rovna délce jedoucího rychlíku v daném čase $t = 3\,\mathrm{h}$, nezávisle na jeho rychlosti u. Ovšem minimálně dva vojáci A, B museli mít hodiny, a to navzájem synchronizované.

Doba Δt trvání děje, jehož začátek i konec lze popsat jako bodové události, je **časová odlehlost** začátku $\mathrm{U_A}$ děje, tedy $\mathrm{A} = \{\vec{r}_\mathrm{A}; t_\mathrm{A}\}$ a konce $\mathrm{U_Z}$ děje, tedy $\mathrm{Z} = \{\vec{r}_\mathrm{Z}; t_\mathrm{Z}\}$. Začátek a konec mohou nastat v různých místech (např. u meteoritu) a nezajímá nás, co se dělo mezitím. Dobou Δt jeho trvání myslíme vždy časovou odlehlost obou hraničních událostí, tedy $\Delta t = t_\mathrm{Z} - t_\mathrm{A}$, bez ohledu na prostorové polohy A, Z. (V teorii relativity se ukáže, že *doba trvání* děje je rovněž *relativní*, tj. závisí na volbě vztažné soustavy.)

Rychlost $\vec{u}$ bodu (nemusí být hmotný) v soustavě $\mathcal{S}$ definujeme, jak jsme byli dosud zvyklí: odpovídají-li události $\mathrm{U_A}$ souřadnice $\{\vec{r}_\mathrm{A}; t_\mathrm{A}\}$ a události $\mathrm{U_Z}$ souřadnice $\{\vec{r}_\mathrm{Z}; t_\mathrm{Z}\}$, pak průměrná rychlost $\vec{u}$ tohoto bodu v intervalu $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_Z}$ je podíl prostorové odlehlosti těchto událostí a jejich časové odlehlosti:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}_\mathrm{Z} - \vec{r}_\mathrm{A}}{t_\mathrm{Z} - t_\mathrm{A}} \quad . \tag{10.6}$$

10.2.8 Klasické skládání rychlostí

Při rovnoměrném přímočarém pohybu není rozdíl mezi průměrnou a okamžitou rychlostí: v obou případech je rychlost dána vztahem

$$\vec{u} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_\mathrm{Z} - \vec{r}_\mathrm{A}}{t_\mathrm{Z} - t_\mathrm{A}} \quad . \tag{10.7}$$

Dosazením snadno zjistíme, že mezi rychlostí $\vec{u}$ naměřenou v $\mathcal{S}$ a rychlostí $\vec{u}\,'$ naměřenou v $\mathcal{S}'$ pohybující se rychlostí $\vec{v}$ vůči $\mathcal{S}$ platí jednoduchý vztah — rychlosti se sčítají jako vektory:

$$\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v} \quad , \tag{10.8}$$

resp., v našem 1D případě s označením $u_x = u$,

$$u' = u - v \quad . \tag{10.9}$$

Odtud ihned plyne, že neexistuje žádná konečná rychlost, která by byla absolutní v tom smyslu, že by měla stejnou hodnotu bez ohledu na volbu vztažné soustavy. Jedině rychlost nekonečná v jedné vztažné soustavě je nekonečná v libovolné vztažné soustavě. (S prominutím, $\infty = \infty - v$, což byla i jedna z raných definic nekonečna).

Tomuto poněkud podezřelému tvrzení však můžeme dát přijatelnější tvar. Nekonečnou rychlostí bychom se mohli dostat od události $\mathrm{U_A}$ k události $\mathrm{U_Z}$ tehdy, kdybychom nenulovou délku $|\vec{r}_\mathrm{Z} - \vec{r}_\mathrm{A}|$ překonali během nulové doby, tedy pokud by platilo, že $t_\mathrm{Z} = t_\mathrm{A}$, čili kdyby obě události byly současné. Potřeba *nekonečné* rychlosti ke spojení událostí $\mathrm{U_A}$ a $\mathrm{U_Z}$ je tedy totéž co *současnost* těchto událostí. Absolutnost nekonečné rychlosti v galileovské mechanice tedy znamená absolutnost současnosti. To je korektní a velmi důležitý důsledek Galileovy transformace.

Pohybující se bod nemusí být hmotný, HB. Může to být postava z filmu na plátně nebo styčný bod čepelí nůžek nebo „prasátko“ otáčející se baterky promítané na vzdálený dům apod. Jeho rychlost může být v principu neomezená (případ téměř rovnoběžných čepelí nůžek) a může převýšit libovolnou předem danou hodnotu; promítáme-li políčka filmu 10× rychleji, jeví se nám pohyby na plátně rovněž 10× rychlejší.

Tímto jsme skončili rekapitulaci klasické kinematiky.
A začínáme s relativitou.

10.3 Princip konstantní světelné rychlosti

Z klasické teorie elektromagnetického pole plyne, že světlo by se mělo v absolutním prostoru a čase šířit ve vakuu podle Maxwellových rovnic rychlostí danou rov. (10.1):

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

V jiných inerciálních soustavách, pohybujících se vůči absolutnímu prostoru, by tedy podle newtonovské fyziky mělo mít světlo rychlost jinou, danou teorémem o vektorovém skládání rychlostí, a tato rychlost by měla proto záviset na směru letu světla. Ale i nejpřesnější měření (např. ve své době Michelsonův-Morleyův pokus) naměřila c stejnou v různých inerciálních soustavách, a to nezávisle na směru letu světla. Protože Země obíhá kolem Slunce s posuvnou rychlostí 30 km/s, tak by v různých ročních obdobích mělo mít světlo mimozemských zdrojů rychlosti navzájem odlišné až o 60 km/s, podle ročního období. Nic takového však nebylo pozorováno. Světelná rychlost byla naměřena stejná v zimě i v létě, a to nezávisle na zdroji světla (ze Země, ze Slunce, ze Siria). Podle toho by Maxwellův *éter*, „nositel světla", musel být *v klidu vůči* libovolné *inerciální soustavě.*

Přesnost měření dostatečně převyšovala přesnost potřebnou pro zjištění odchylek. Většina pokusů (např. Michelson a Morley) také měřila přímo *rozdíl* mezi rychlostmi v různých směrech; tím se získá výsledek mnohem přesněji než přímým měřením rychlostí v obou směrech a pak jejich odečtením.

Pokusy ověřily, že rychlost světla ve vakuu:
– je ve všech inerciálních soustavách stejně veliká;
– nezávisí na směru letu světla;
– nezávisí ani na druhu zdroje, ani na jeho rychlosti, ani na směru pohybu.

A aby bylo jasno: nejde o nějaké specifikum světla. Pokusy ověřily, že:

Cokoliv má velikost rychlosti $c_0 = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$ *v jedné inerciální soustavě, má tutéž velikost rychlosti i v kterékoli jiné inerciální soustavě. (Nazývá se stručně* **světelná rychlost** {luminal speed}*.)*

Prostě: demokratická ***Ústava speciální relativity*** má dva pilíře:

1) Konec vlády jedné vztažné soustavy: *všechny IS jsou si rovny;*
2) Rovné světlo všem: *světelná rychlost je ve všech směrech a všech IS stejná.*

10.4 Lorentzova transformace

10.4.1 Motivace

Princip konstantní světelné rychlosti a Galileova transformace jsou spolu ve sporu. Ten vyřešíme nalezením jiné transformace než Galileovy, a to takové, aby při převodu souřadnic z libovolné soustavy $\mathcal{S}$ do libovolné soustavy $\mathcal{S}'$ vycházela světelná rychlost c v obou soustavách stejná, ale jinak aby se měnilo co nejméně.

Protože chceme zachovat platnost Newtonových zákonů v klasické oblasti, musíme se omezit na *lineární* transformace mezi prostorovými a časovými souřadnicemi, tedy $\{x'; t'\}$ vůči $\{x; t\}$. Jenom tak totiž každý rovnoměrný přímočarý pohyb v $\mathcal{S}$ zůstane rovnoměrným přímočarým pohybem i v $\mathcal{S}'$ (a samozřejmě klid bereme taky za pohyb rovnoměrný přímočarý, a to s nulovou rychlostí).

Fyzikálně řečeno: nepřítomnost výsledné síly (vyjádřená nulovým zrychlením) v jedné inerciální soustavě znamená nepřítomnost výsledné síly i v každé jiné inerciální soustavě.

Taková transformace existuje; nazývá se podle svého objevitele **Lorentzova** (H. A. Lorentz, publikoval ji r. 1899 a r. 1904, název navrhl H. Poincaré 1905).

A praktická poznámka: Víme-li již, že čas úzce souvisí s prostorem, je záhodno mít pro ně stejná měřítka. (Metr byl původně odvozen od rozměrů Země, zatímco sekunda od jejího otáčení, později od oběhu kolem Slunce; to vše jsou jevy, které spolu nesouvisejí.) Víme-li již navíc, že světelná rychlost c nezávisí na volbě inerciální vztažné soustavy, nabízí se měřit dobu Δt dráhou $\Delta s = c\Delta t$, kterou za tu dobu uběhne světlo ve vakuu. Zavedeme proto veličiny

$$\textbf{redukovaný čas}\ \{\tilde{}\ \textit{time}\}\quad T \equiv x_0 \quad := \quad ct\ , \tag{10.10}$$

$$\textbf{redukovaná doba}\ \{\tilde{}\ \textit{duration}\}\quad \Delta T \equiv \Delta x_0 \quad := \quad c\Delta t\ . \tag{10.11}$$

Potom mají všechny veličiny T, T', x, x_0, x', x'_0 týž fyzikální rozměr délky, L.

Běžná je značka x_0 připomínající analogii s x a usnadňující symbolické zápisy součtů apod. Značka T se občas užívá v populární, nikoli vědecké literatuře. Připomene nám však, že jde o čas, a proto ji tu zhusta užíváme, zejména u diagramů.

Věrni svému záměru podat jen se SŠ matematikou vše, co jen trochu jde, budeme relativistické jevy demonstrovat na grafech. Ovšem Lorentzovým rovnicím se vyhnout nemůžeme; na štěstí je ta práce s nimi opravdu jednoduchá. A k těm grafům x-T: Z estetických důvodů volíme osy $\mathbf{x}$, $\mathbf{T}$ k sobě kolmé a na nich stejné měřítko, protože nám vyjde hezký světelný kužel s přímkami navzájem kolmými. Ale až do odst. 10.7.2 je to *úplně jedno*: nevyužíváme totiž metriku spojující dvě veličiny x, T (v Galileově transformaci dokonce vůbec spojené nejsou). Teprve s využitím invariantů by měřítko a kolmost os měly smysl. Ale i tehdy je jen na nás, zda ze zvyku chceme právě pro „naši“ soustavu $\mathcal{S}$ kolmé osy nebo ne. Obr. 10.2 vás o tom přesvědčí. Na grafech měříme jen dvě *odlehlosti* (odst. 10.2.2), a to *ve směrech os.*

10.4.2 Speciální Lorentzova transformace (2D prostoročas x, t)

Omezme se na pohyb v jediném (neorientovaném) směru a orientujme v něm shodně osy $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$ (tedy podle odst. 10.2.5 jde o **speciální Lorentzovu transformaci** {˜}).

Uvažujme jistou událost (např. výskyt hmotného bodu v jistém místě a čase), popsanou ve dvou inerciálních soustavách $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{S}'$. Prostoročasové souřadnice této události označíme $\{x; t\}$ v $\mathcal{S}$, resp. $\{x'; t'\}'$ v $\mathcal{S}'$.

Označme v rychlost soustavy $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$; pak čekáme, že rychlost soustavy $\mathcal{S}$ vůči $\mathcal{S}'$ bude $-v$. Od transformací čekáme, že budou tvořit grupu, tedy

- složením dvou transformací dostaneme opět transformaci téhož typu,

- existuje jednotková transformace,
- ke každé transformaci existuje inverzní transformace.

Označme c rychlost, mající si transformací zachovat svou velikost. Pak lze dokázat (Dodatek C.2), že nejobecnější lineární transformace vyhovující těmto čtyřem požadavkům je

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \tag{10.12}$$
$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \quad , \tag{10.13}$$
$$y' = y \quad , \tag{10.14}$$
$$z' = z \quad , \tag{10.15}$$

kde zavádíme **Lorentzův činitel** {˜ *factor*}

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad . \tag{10.16}$$

Zdůrazněme, že délkové rozměry y, z ve směrech **kolmých** k pohybu **zůstávají stejné** (stejně jako u Galileovy transformace). Žádné zkracování se nekoná.

Všimněme si, že pro $c \to \infty$ je $v/c \to 0$ a transformace přechází na Galileovu transformaci.

Rychlost pohybujícího se bodu je definována stejně jako v klasické mechanice, rov. (10.7):

$$\vec{u} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{\mathrm{Z}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{Z}} - t_{\mathrm{A}}} \quad \text{, tedy zde} \quad u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{\mathrm{Z}} - x_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{Z}} - t_{\mathrm{A}}} \quad . \tag{10.17}$$

Symetrie těchto rovnic vynikne, zavedeme-li spolu s redukovaným časem a dobou ještě normalizovanou rychlost {˜ *velocity*}, {˜ *speed*}:

$$\textbf{normalizovaná rychlost} \quad \beta := v/c \quad \text{, a} \tag{10.18}$$
$$\textbf{Lorentzův činitel} \quad \gamma := 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad . \tag{10.19}$$

Potom má Lorentzova transformace tvar

$$x' = \gamma(x - \beta x_0) \quad , \tag{10.20}$$
$$x'_0 = \gamma(x_0 - \beta x) \quad , \tag{10.21}$$
$$y' = y \quad , \tag{10.22}$$
$$z' = z \quad . \tag{10.23}$$

..? Otázka: Dokažte přímým výpočtem, že rychlost $w = 1$ je pro Lorentzovu transformaci 10.20-10.23 samodružná, tj. je-li $w := v/c = 1$ hodnota normalizované rychlosti změřená v $\mathcal{S}$, pak také v $\mathcal{S}'$ platí $w' := w'/c' = 1$. (→str. 265)

Speciální Lorentzovy transformace podél téže osy se skládají snadno a tvoří grupu. Skládání Lorentzových transformací podél různých os je přiměřeně složitější (krychle se převádí na obecný, nepravoúhlý rovnoběžnostěn) a vede nikoli ke speciální, ale k *obecné* Lorentzově transformaci zahrnující i otočení prostorových souřadnic; pro zájemce viz odst. 10.7.11.

Dodatek C.1 dokazuje, že rov. (10.12)-10.15, resp. (10.20)-10.23, jsou určeny našimi požadavky na transformaci jednoznačně.

10.5 Vlastnosti a důsledky speciální Lorentzovy transformace

10.5.1 Transformace rychlostí („skládání rychlostí")

Značme

$$\begin{aligned} u' &= x'/t' = B'c && \text{rychlost bodu v } \mathcal{S}' \quad , && (10.24)\\ u &= x/t = Bc && \text{rychlost bodu v } \mathcal{S} \quad , && (10.25)\\ v &= \beta c && \text{rychlost } \mathcal{S}' \text{ vůči } \mathcal{S} \quad . && (10.26) \end{aligned}$$

Vydělením rovnic (10.12)/(10.13) pro x', t' dostaneme

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad \text{a inverzní} \qquad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad , \tag{10.27}$$

resp. pro normalizované rychlosti B, B', β

$$B' = \frac{B - \beta}{1 - B\beta} \qquad \text{a inverzní} \qquad B = \frac{B' + \beta}{1 + B'\beta} \quad . \tag{10.28}$$

To obecně jsou lineární lomené funkce vůči proměnným u, u', resp. B, B'. Lineární lomená funkce (10.27) má vždy právě jeden pevný bod u takový, že $u' = u$; zde je to, jak víme, $u = c$, resp. $B = 1$.

Důležité je, že inverzní transformace je rovněž Lorentzovou transformací: dostaneme ji též systematickou záměnou $B \leftrightarrow B'$; $\beta \leftrightarrow \beta'$ odpovídající záměně soustav $\mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}'$.

Pro $c = \infty$ by se rov. (10.27) redukovala na lineární rovnici a rov. (10.12) by přešla na Galileovu transformaci, kde se rychlosti skládají pouhým (vektorovým) součtem:

$$u' = u - v \quad \text{resp.} \quad u = u' + v \quad ; \tag{10.29}$$

zápis typu (10.28) by neměl smysl.

Protože je hodnota rychlosti c konečná (světelná rychlost), nastane při vzájemné rychlosti $v < c$ (resp. $\beta < 1$) vztažných soustav pro pohyb bodu libovolnou rychlostí u právě jeden z těchto případů:

- $|u| < c \quad \Rightarrow \quad |u'| < c$ podsvětelné rychlosti,
- $|u| = c \quad \Rightarrow \quad |u'| = c$ světelná rychlost,
- $|u| > c \quad \Rightarrow \quad |u'| > c$ nadsvětelné rychlosti.

Rychlosti u se tedy rozpadají do tří tříd; příslušnost ke třídě se Lorentzovou transformací nemění. (Bod pomalejší než světlo v jedné vztažné soustavě $\mathcal{S}$ zůstane pomalejším než světlo i v libovolné jiné vztažné soustavě $\mathcal{S}'$ apod.) Případ $|u| > c$ zahrnuje i $u = \infty$ (současnost).

10.5.2 Čtverec intervalu; charakter intervalu

Interval {˜} coby úsečku určenou dvojicí událostí jsme podle norem ISO/IEC i Electropedie IEV [33] zavedli v odst. 10.2.2. Zavedli jsme také pro jeho měření dvě veličiny — odlehlosti prostorovou a časovou, přičemž jen časová byla invariantem Galileovy transformace, tj. jen časová odlehlost dvou událostí byla stejná, nezávislá na volbě soustavy $\mathcal{S}$, v níž jsme se ji rozhodli spočítat. Pojmy i termíny odlehlosti prostorové a časové si z klasické mechaniky podržíme i nadále.

Přirozeně nás zajímá, jaká veličina $f(\vec{r}; t)$ bude nyní **invariantem Lorentzovy transformace** (viz str. 32).

Každé události $\mathrm{U_A}$ lze přiřadit interval OA (od počátku), a ten lze charakterizovat kvadratickou vzdáleností (viz odst. 10.7.2); mírou bude veličina **čtverec intervalu** {*square* ˜} (mezi A a O) Δs^2_{A}:

$$\Delta s^2_{\mathrm{U}} \equiv x^2 - c^2 t^2 = x^2 - T^2 \quad . \tag{10.30}$$

Obecně zavedeme **čtverec intervalu** s^2_{AB} mezi *dvěma* událostmi $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_B}$ vztahem

$$\textbf{čtverec intervalu:} \qquad s^2_{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 - c^2 (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})^2 \quad . \tag{10.31}$$

V odst. C.2.4 jsme požadovali, aby z $\Delta s^2 = 0$ plynulo i $\Delta s'^2 = 0$, tedy aby rovnost $\Delta s^2 = 0$ byla *invariantní* vůči Lorentzově transformaci, tj. byla jejím invariantem. Přímým dosazením však ověříme dokonce, že sám čtverec intervalu Δs^2 je invariantem Lorentzovy transformace, i když není roven nule. Platí totiž

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= x'^2 - c^2 t'^2 = x'^2 - T'^2 && (10.32) \\ &= (x^2 - 2\beta x T + \beta^2 T^2) \ - \gamma^2 (T^2 - 2\beta T x + \beta^2 x^2) = \ \Delta s^2 \ , && (10.33) \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. (Z toho ovšem *neplyne*, že by měly být invariantní dílčí *odlehlosti*.)

Zdůrazněme, že tento *„čtverec" intervalu* může být *kladný*, *nulový* i *záporný*. Podle jeho znaménka můžeme zavést **charakter intervalu**, který bude, jak je zřejmé, relativisticky invariantní. Klasifikujeme

- **interval světelný** {*light-like interval*}, též **světelného charakteru**; je tvořen body, pro něž $\Delta s^2 = 0$ a tvoří tedy plášť dvojitého **světelného kužele** {*light cone*} s vrcholem v počátku.
- **interval časový** {*time-like*}, též **časového charakteru**; je tvořen body, pro něž $\Delta s^2 < 0$ a vyplňují tedy vnitřek dvojitého kužele, jehož
  - horní část se nazývá **absolutní budoucnost** {*absolute future*};
  - spodní část se nazývá **absolutní minulost** {*absolute past*}.

  Kterýkoli z těchto bodů lze spojit s počátkem úsečkou, která může představovat světočáru hmotného bodu. Také existuje IS, v níž je tento bod *soumístný* s počátkem (tj. dostatečně rychlá raketa by tam stihla doletět);
- **interval prostorový** {*space-like*}, též **prostorového charakteru**; je tvořen body, pro něž $\Delta s^2 > 0$ a vyplňují tedy oblast, která se nazývá **relativní současnost** {*relative present*}. Ke každému z jeho bodů existuje IS, v níž je tento bod (resp. událost jemu odpovídající) *současný* s počátkem.

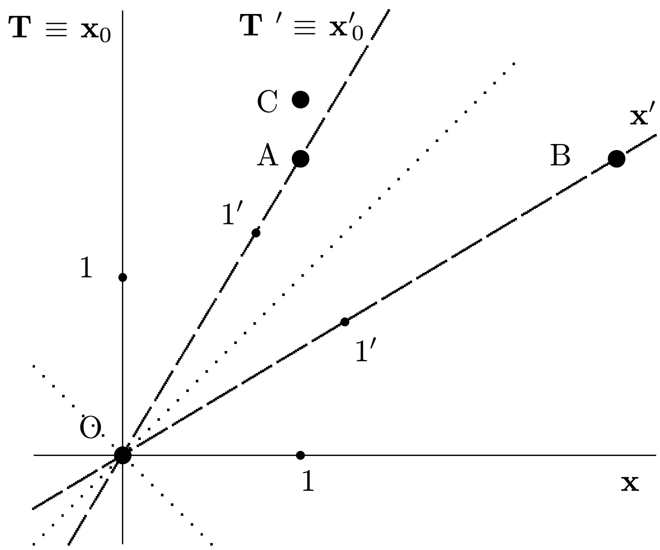
Několik poznámek:

- Při výkladu invariantů se zpravidla jako ilustrace nejprve dokazuje, že v 3D při otočení os x, y, z se zachovává délka Δd úsečky. Někdy pak může vzniknout dojem, že v Galileově transformaci jsou dva invarianty, totiž délka Δd a doba Δt, zatímco v Lorentzově transformaci jen jediný, totiž interval s^2. To ovšem není pravda, délka není invariantem v Galileově transformaci popisující pohyb, viz odst. 10.2.7; invariantem v Galileově transformaci je jen doba. Délka se zachovává jen při transformaci mezi dvěma soustavami jsoucími navzájem v klidu (např. při otočení os), a to ať už jde o transformaci Galileovu nebo Lorentzovu.
- Přísně vzato: pokud bychom definovali **velikost intervalu** Δs jeho čtvercem Δs^2, tedy coby $\Delta s := \sqrt{\Delta s^2}$, byla by tato velikost intervalu sama určena až na znaménko. Jak si však snadno rozmyslíte, nikde nám to nevadí. Výraz Δs^2 je vždy reálný, nikdy komplexní, takže Δs, pro které je $(\Delta s)^2 = \Delta s^2$, je buď reálné, anebo ryze imaginární. Fyzikální význam velikosti intervalu také má jen jeho absolutní hodnota $|\Delta s| = \sqrt{|\Delta s^2|}$ a je nutno dodat údaj, že $\Delta s^2 > 0$ (prostorový interval), či $\Delta s^2 < 0$ (časový interval), či $\Delta s^2 = 0$ (světelný kužel).
- Někdy se v literatuře zavádí čtverec intervalu $\sigma^2 = -s^2 = c^2t^2 - x^2$, tedy s opačným znaménkem.

V *odborné* literatuře se však **intervalem** zpravidla nazývá nikoli úsečka, ale veličina: buď přímo **čtverec intervalu** s^2_{AB} námi výše zavedený, případně *odmocnina* z něho (ta je ovšem buď reálná nebo ryze imaginární, jak bylo výše poznamenáno), nebo *velikost* této odmocniny (ta je pak reálná nezáporná). Dejte na to při studiu literatury pozor.

10.5.3 Relativita současnosti

Na rozdíl od newtonovské mechaniky je v teorii relativity současnost dvou nesoumístných událostí *relativní*, tj. závislá na volbě vztažné soustavy. Nebereme-li to v úvahu, dostaneme se snadno do sporu, který je podstatou řady „paradoxů“.



Obrázek 10.1: Relativita současnosti

Ilustrace (Obr. 10.1): v $\mathcal{S}$ jsou události $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_B}$ *současné* ($T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B}$) a *nesoumístné* ($x_\mathrm{A} \neq x_\mathrm{B}$). Události $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_C}$ jsou *nesoučasné* ($T_\mathrm{A} \neq T_\mathrm{C}$) a *soumístné* ($x_\mathrm{A} = x_\mathrm{C}$). Všechny tři nastaly později než počátek ($T_\mathrm{C} > T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B} > 0$).

Ale v soustavě $\mathcal{S}'$ pohybující se směrem od počátku k $\mathrm{U_B}$ rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$ nastane událost $\mathrm{U_A}$ *později* než $\mathrm{U_B}$, tedy $T'_\mathrm{A} > T'_\mathrm{B} = 0$. Ověřte si to na grafickém znázornění: osy $\mathcal{S}$ jsou plně, osy $\mathcal{S}'$ jsou čárkovaně, světelný kužel je tečkovaně.

Výpočet: $\beta = \frac{3}{5}$, tedy $\gamma = \frac{5}{4}$. Uvažujme událost $\mathrm{U_A} = \{x; T\} = \{1; \frac{5}{3}\}$. V $\mathcal{S}$ je událost $\mathrm{U_C} = \{1; \frac{5}{2}\}$ soumístná s $\mathrm{U_A}$, událost $\mathrm{U_B} = \{\frac{25}{9}; \frac{5}{3}\}$ je současná s $\mathrm{U_A}$. Sledujme tyto události v obou soustavách. Přechodem k $\mathcal{S}'$ se nezachovala současnost ani soumístnost: v $\mathcal{S}'$ je $\mathrm{U_B} = \{\frac{20}{9}; 0\}'$ současná s počátkem souřadnic $\mathrm{O} = \{0; 0\}'$; $\mathrm{U_A} = \{0; \frac{5}{4}\}'$ je soumístná s počátkem souřadnic $\mathrm{O} = \{0; 0\}'$. A konečně $\mathrm{U_C} = \{-\frac{5}{8}; \frac{19}{8}\}'$.

Ukažte a podložte výpočtem, že v soustavě $\mathcal{S}''$, která se pohybuje směrem opačným, nastane událost $\mathrm{U_A}$ naopak dříve než $\mathrm{U_B}$, tedy $T''_\mathrm{A} < T''_\mathrm{B}$.

Prurez mechanikami - text.indd 233 05.01.2024 13:37:58

10.6 Dřívější interpretace: kontrakce délek, dilatace času, éter

Poděkování: Není snadné vystihnout a srozumitelně vysvětlit to, v čem se lidé pojmově míjejí. Svými diskuzemi mi velmi přispěli posluchači jak MFF UK, tak U3V, i jednotliví zájemci (Ing. Jaroslav Feytis, Ing. Jaromír Jedlička); všem za diskuze děkuji.

Klasická fyzika byla neobyčejně úspěšná v popisu přírody. Klasické, ba i předklasické představy jsou nám stále do té míry blízké a sugestivní (zejména ve srovnání s kvantovou fyzikou), že je užíváme občas i nevědomky, třebaže je nebereme doslova. Tak třeba ještě z ptolemaiovského, geocentrického pojetí běžně říkáme, že vychází slunce, nebo dokonce že zašlo za mraky, aniž to bereme moc doslovně, tj. že by mraky stály a sluníčko se za ně šlo schovat. Podobně i v oblasti platnosti STR se užívají některé historické formulace, které by při doslovném výkladu mohly zavádět. Bylo by ovšem školometské chtít je zakazovat. Lepší bude připomenout, co *znamenají* a zejména upozornit na to, co *neznamenají*.

Nejrozšířenější příčinou chybného úsudku bývá snaha o **„kubistický obraz“** popisující problém z více stran zároveň. Předem odsouzen k neúspěchu je každý takový pokus o současný popis ze dvou soustav $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, např. v „paradoxu“ dlouhého auta v krátké garáži (kap. 10.6.4) uvažovat garáž v $\mathcal{S}$ v čase $t = 0$, ale současně cítit jako auto jen to, co existuje v jistém čase pevném pro auto, např. $t' = 0$, tedy v pevném čase v $\mathcal{S}'$. Právě současnost je totiž v STR relativní, tedy závislá na volbě vztažné soustavy.

Připomeňme konečně ze str. 48, že v obecném hovoru se slovo **čas** užívá jako obecný pojem pro všecko z této větve prostoročasu (podobně jako **délka** pro cokoli z oblasti měření prostoru, i když to je třeba *výška*). Zde budeme co možná ostře odlišovat jednak pojem **časový údaj**, pro stručnost též zvaný **okamžik** {*instant*}, což je to, co ukazují hodinky (5 o’clock, 5 Uhr), jednak pojem **doba**, **doba trvání** {*duration*}, což je rozdíl dvou časových údajů (5 hours, 5 Stunden). Proto namísto „dilatace času“ je výstižnější termín „dilatace dob“, stejně jako se mluví o „kontrakci délek“ a nikoli třeba o „kontrakci prostoru“.

Také „poločas“ by se měl proto raději jmenovat „polodoba“, ale to už bychom asi chtěli moc. A jak už jsme zmínili, „teploměr“ by měl být „teplotoměr“, když měří teplotu; teplo měříme kalorimetrem.

10.6.1 Relativistické pojmy a termíny: vlastní délka, vlastní doba

Klasická fyzika byla zvyklá na preferovaný „absolutní“ prostor a čas $\mathcal{S}_0$. Vůči němu pak vztahovala měření a snažila se vysvětlit, proč „pohybující se těleso“ má námi změřené délkové rozměry jiné (kontrahované = stlačené) než v klidu, a proč jsou pro nás tiky pohybujících se hodin delší (dilatované = roztažené), než když tytéž hodiny jsou v klidu vůči nám. I zde budeme „intuitivně“ brát za $\mathcal{S}_0$ naši „klidnou Zemi“, aby vyjádření byla jednodušší; dokonce ji budeme pokládat za legendární ptolemaiovskou „Zeměplochu". Vzápětí ovšem ukážeme, že symetrický popis z „letící soustavy" vede k témuž relativistickému jevu.

- **Vlastní délkou** d_0 {*proper lenght*}, např. tyče, nazýváme délku této tyče měřenou v takové soustavě, v níž je tyč v klidu („stojí"). Délka d téže tyče měřená v jiné soustavě, vůči níž se tyč pohybuje ve směru své délky rychlostí β s odpovídajícím $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, je však jiná, a to $d = d_0/\gamma$, jak vzápětí odvodíme („Pohybující se tyč je kratší", kap. 10.6.2).

Pro časový údaj v různých soustavách $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ se užívají následující termíny:

- **Vlastní čas** {*proper time*} hodin je časový údaj, který tyto hodiny ukazují. Je tedy spjat se soustavou $\mathcal{S}''$, třebas i *neinerciální*, v níž tyto hodiny jsou v klidu (podrobně na str. 257).
- **Vlastní doba** {*proper duration*} děje, který probíhá po světočáře nějakého bodového objektu (např. svíčky) od události $\mathrm{U_A}$ (např. její zapálení) do události $\mathrm{U_Z}$ (dohoření); je to označení doby, která uběhla mezi těmito událostmi v obecně neinerciální soustavě $\mathcal{S}''$ spojené s oním objektem (svíčkou), tedy rozdíl dvou vlastních časů studovaného objektu (svíčky). V $\mathcal{S}''$ jsou zřejmě události $\mathrm{U_A}$ a $\mathrm{U_Z}$ soumístné. („Pohybující se hodiny jdou pomaleji", kap. 10.6.3)
- **Lokální čas** {˜} a příslušná **lokální doba** {˜} jsou časový údaj, resp. doba (rozdíl dvou časových údajů), *měřené* v libovolné *inerciální* soustavě $\mathcal{S}'$ hodinami, které jsou vůči této $\mathcal{S}'$ v klidu. Tento čas i doba ovšem závisejí na volbě $\mathcal{S}'$.

  Pro jistotu říkáme „změříme", „zjistíme" apod., nikoli „vidíme", abychom nebyli chyceni za slovo: díky konečné rychlosti světla totiž vidíme *teď* každou věc vzdálenou od nás s nikoli takovou, jaká teď je, ale jaká byla *dříve*, před dobou $\Delta t = s/c$.
- Termíny **relativistický čas** {˜} a **relativistická doba** {˜} se užívají jen pro zdůraznění a odlišení pro časový údaj, resp. dobu, měřené v *jiné* inerciální soustavě $\mathcal{S}'$ než v té $\mathcal{S}''$, v níž je sledovaný objekt v klidu (jde tedy o lokální čas či dobu v $\mathcal{S}'$).

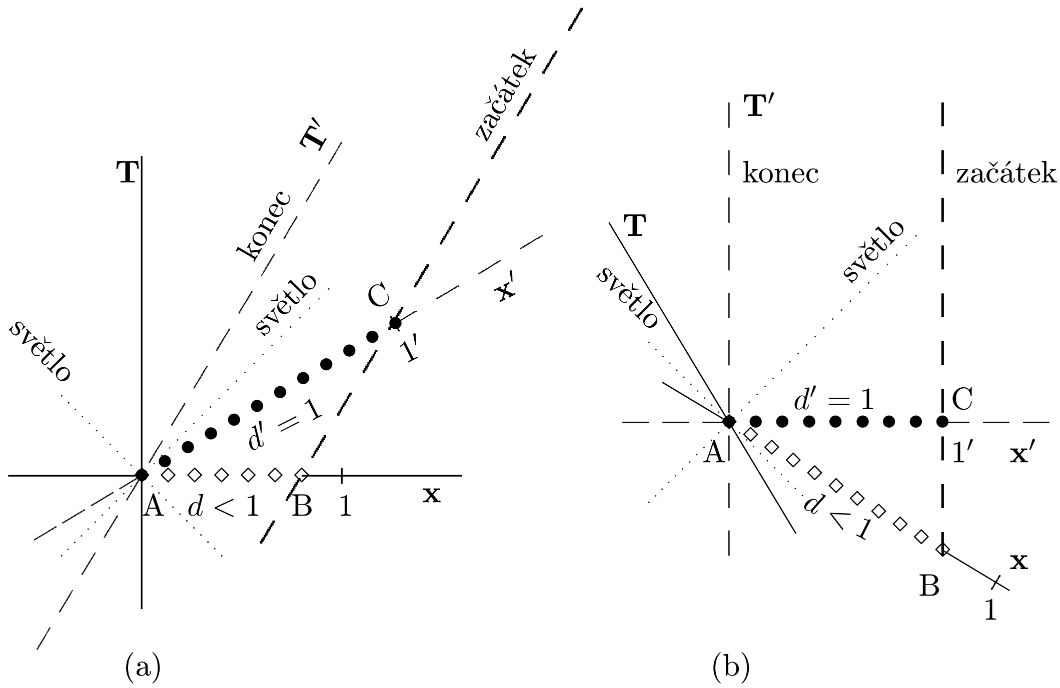
10.6.2 Kontrakce délek

Problém Tyč klidná v $\mathcal{S}'$ má vlastní délku $d_0 = d' = 1$. Vůči nám v $\mathcal{S}$ se pohybuje (začátkem dopředu) rychlostí β. Proč jí naměříme v naší soustavě délku $d < d_0$?

Měření délky pohybující se tyče jsme popsali na str. 225. Stejný výsledek však dostaneme i např. změřením délky stínu, jak je dále uvedeno.

Původní Lorentzova interpretace byla bez dilatace času. Tyč je tvořena nabitými částicemi (jádra atomů, elektrony). Jejich elektromagnetické pole se řídí Maxwellovými rovnicemi a drží částice v jejich rovnovážných polohách. Elektromagnetické pole *pohybujícího se* tělesa se transformuje podle Lorentzovy transformace, ekvipotenciální plochy nábojů se z původních koulí mění na sploštělé elipsoidy, a vlivem toho i těleso samo se smršťuje ve směru pohybu („kontrakce“ = smrštění, název jevu je občas zavádějící). Tyč je vůči nám stlačená, my jsme vůči tyči roztažení.

Dnešní pojetí Nyní klademe důraz na to, že pojem *současnosti* dvou nesoumístných dějů (zde: měření polohy obou konců tyče) je relativní, tj. různý v obou uvažovaných soustavách $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$. Tyč je pro nás kratší, ale i my jsme pro tyč kratší.



Obrázek 10.2: Kontrakce tyče kreslená s (a) $\mathbf{x} \perp \mathbf{T}$ (b) $\mathbf{x}' \perp \mathbf{T}'$. Výsledek je stejný. Jednotky na osách $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ se liší, jak plyne z invariance prostoročasového intervalu $\mathrm{d}s^2$.

Grafický rozbor Označme $\mathcal{S}$ naši „klidnou“ vztažnou soustavu; její osy $\mathbf{x}$, $\mathbf{T}$ jsou plné. Soustava $\mathcal{S}'$, v níž je tyč délky $d' = 1$ v klidu, má osy $\mathbf{x}'$, $\mathbf{T}'$ čárkované. Synchronizujme počátky obou soustav jako událost, kdy konec tyče míjí počátek naší soustavy; bude tedy $\mathrm{A} \equiv \{0; 0\} = \{0; 0\}'$. Světočára konce tyče pak splývá s osou $\mathbf{T}'$, světočára začátku tyče je s ní rovnoběžná, rovněž čárkovaná, tučnější. Poloha tyče v okamžiku $t' = 0$ podle $\mathcal{S}'$ je vyznačena znaky $\bullet$, poloha tyče v okamžiku $t = 0$ podle $\mathcal{S}$ znaky $\diamond$; tyč má tedy v $\mathcal{S}$ délku $d = \frac{1}{\gamma} < 1$. Světelný kužel je tečkovaně. V grafu (a) je $\mathbf{x} \perp \mathbf{T}$, v grafu (b) je $\mathbf{x}' \perp \mathbf{T}'$. Obojí dává ovšem totéž.

Měříme-li délku tyče (ať už pohybující se nebo klidné, a ať klasicky nebo v STR), určíme prostoročasové souřadnice obou jejich konců, a to *v tomtéž čase*, tj. s tímtéž časovým údajem z hlediska *soustavy, v níž měříme.*

V $\mathcal{S}$ pro $T = 0$ je tedy $x_\mathrm{A} = 0$, $x_\mathrm{B} = d = d_0/\gamma$, a my zjistíme, že v naší soustavě má tyč délku $\gamma\times$ kratší oproti klidové délce d_0. Kdybychom tedy např. podél dráhy tyče umístili fotocitlivou vrstvu, proti ní zdroj plošného světla a v okamžiku $T = 0$ světlo všude bliklo, zachytil by se na vrstvě stín dlouhý $d = d_0/\gamma$.

Délku d_0 naměří v čase $T' = 0$ pozorovatel (brouček sedící na tyči) v klidu vůči $\mathcal{S}'$: $x'_\mathrm{A} = 0$, $x'_\mathrm{C} = d' = d_0$. Je nutno si uvědomit, že pojem času, a tím i pojem současnosti, je relativní neboli závislý na pozorovateli (fyzikálně řečeno: na volbě vztažné soustavy).

Lorentzova transformace nám vše potvrdí. $x' = \gamma(x - \beta ct)$ dává pro $t = 0$ ihned $d' = \gamma d$, tedy $d = d_0/\gamma$. Protože je vždy $\gamma \geq 1$, zjistíme my v $\mathcal{S}$ vždy, že letící tyč je *kratší*, a to $\gamma-$krát.

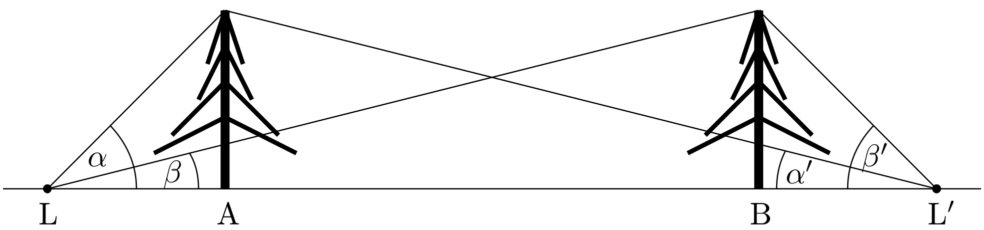
Soustavy jsme si synchronizovali předpokladem $\{0;0\} = \{0;0\}'$. Výsledek ovšem na této synchronizaci nezávisí, ve výsledku se vyskytují jen rozdíly souřadnic. Ověřte to.

My změříme svou délku správně (oba konce současně pro nás) a naměříme lokální délku $d = d_0/\gamma$. Brouček na tyči nám vytkne, že (podle něho) jsme sice záď měřili správně ($t_\mathrm{A} = t'_\mathrm{A} = 0$), ale příď (B) byla vůči $\mathcal{S}'$ měřena o dobu $d_0\beta$ dříve, a za tuto dobu jsme vůči němu urazili rychlostí β vzdálenost $d_0\beta^2$, o kterou se nám jeví tyč kratší, zřejmě tedy platí $d'' = d_0(1 - \beta^2)$. Dále řekne, že my na Zemi používáme γ-krát kratší délkovou jednotku, naměříme tedy délku $\gamma-$krát delší, dohromady $d = \gamma d'' = \gamma d_0(1 - \beta^2) = d_0/\gamma$ namísto jeho d_0.
Brouček má samozřejmě pravdu taky, jen porovnává *naši* lokální délku se *svou* (která je též vlastní délkou).

..? Otázka: Určete složky (odlehlosti) událostí B, C v $\mathcal{S}$ a v $\mathcal{S}'$. (→str. 265)

Nemůže však uspět „kubismus“ ze str. 234, tj. pokus o popis ze Země, doplněný snahou pokládat za tyč jen to, co tak cítí brouček na tyči sedící a trvat na tom, že tyč je „ve skutečnosti“ dlouhá d_0 a chtít ji tak vnímat i ze Země.

K úvaze To, co vnímáme očima, resp. kamerou, není ani výška, ani vzdálenost, ale úhel, pod kterým vidíme daný předmět (tyč, strom), viz obr. 10.3.
Dva lidé L, L′ vidí stejně vysoké stromy A, B pod různými úhly α, β, resp. α', β'. Pozorovatel L tvrdí, že $\alpha > \beta$, tedy A > B, ale L′ tvrdí, že $\alpha' < \beta'$, tedy A < B. Kdo má pravdu?



Obrázek 10.3: Úhlová velikost stromů

10.6.3 Dilatace času

Problém Mezi dvěma tiky na hodinách v „letící“ soustavě $\mathcal{S}'$ uplyne doba T'. Jakou dobu T naměří pozorovatel v „klidné“ soustavě $\mathcal{S}$?

Řešení Opět, nechť hodiny proletěly společným počátkem obou soustav v okamžiku $T = T' = 0$. Až v $\mathcal{S}'$ uplyne doba T', bude

$$0 = x' = \gamma(x - \beta T) \quad , \tag{10.34}$$
$$T' = \gamma(T - \beta x) \quad , \tag{10.35}$$

odkud $x = \beta T$ (hodiny letí rychlostí $v = \beta c$) a $T' = \gamma T(1 - \beta^2)$, čili $T = \gamma T'$. V soustavě $\mathcal{S}$ uplyne doba γ-krát *delší.*

Heslovitě řečeno: „Mezi dvěma událostmi $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_Z}$ uplyne nejkratší doba v té inerciální soustavě, v níž jsou $\mathrm{U_A}$, $\mathrm{U_Z}$ soumístné“ (tedy měříme-li tuto dobu hodinami, které právě stihnou zajet od jedné události ke druhé; předpokládá se ovšem, že interval AZ je časový).

Zobecnění Rov. (10.34), (10.35) platí i pro *maličké* $T' = \mathrm{d}\tau$ a celkovou dobu lze získat i pro nerovnoměrný pohyb součtem dílčích dob — integrálem

$$T = \int_0^{T'} \gamma(\tau)\mathrm{d}\tau \quad . \tag{10.36}$$

Mikroskopické ověření Mezony μ s poločasem rozpadu $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s vznikají ve vrchních vrstvách atmosféry z kosmického záření. Letí k povrchu Země dráhu $d \approx 30$ km rychlostí velice blízkou světelné rychlosti. Z „pozemského hlediska“ tedy letí nejméně dobu $\tau = d/c \approx 10^{-4}\,\mathrm{s} \approx 50 \cdot \tau_0$. Za tento násobek poločasu rozpadu by se jejich počet zmenšil rozpadem asi 10^{20}-krát, takže bychom je na Zemi prakticky nemohli registrovat; my je ale registrujeme. Vysvětlení: při jejich vysoké rychlosti jim plyne čas podstatně pomaleji.

Makroskopické ověření je popsáno mj. v [8] (st. vyd. str. 1013, nové str. 1037): v říjnu 1977 J. Hafele a R. Keating nechali čtvery přenosné atomové hodiny 20× obletět kolem Země na komerčních leteckých linkách v různých směrech. Výsledné zpoždění oproti hodinám, které zůstaly na zemi, se shodovalo s teorií na 10 %. O několik let později byla po 15 h oblétání Chesapeakské zátoky potvrzena dilatace času s přesností lepší než 1 %. Bez teorie relativity by ovšem byla chyba 100 %, řádově stovky ns.

V dnešní době se při přemísťování přesných atomových hodin vždy započítávají efekty STR i OTR. I komerční hodiny na družicích pro GPS se nastavují s uvážením jak STR, tak i OTR.

10.6.4 „Dlouhé auto projíždí krátkou garáží“

Použijeme společnou jednotku pro dobu $T \equiv ct$ i délku x. Auto vlastní délky 1 (světočáry jeho přídě **Z** a zádě **Y** jsou strmější šikmé čárkované čáry se stupnicí času T') projíždí rychlostí $\beta = 3/5 = 0{,}6$ garáží rovněž vlastní délky 1 (světočáry jejího vjezdu **A** a výjezdu **B** jsou svislé plné čáry; jsou tučné tam, kde garáž může být zavřená). Na oslavu zableskne světlo, když střed auta je ve středu garáže — centrální událost **L** označená čtverečkem □. Vedou z ní dva tenké tečkované světelné záblesky a určují mj. současnost podle konců garáže a auta; pro větší přehlednost v centru jsou však zakresleny až od styku se zádí **Y** a výjezdem **B**. Ty nám najdou současnost: světelná rychlost je totiž stejná v každé inerciální soustavě, tedy i v $\mathcal{S}$, i v $\mathcal{S}'$, a událost **L** je uprostřed auta i garáže.

Soustavy $\mathcal{S}$ (garáž) a $\mathcal{S}'$ (auto) synchronizujeme počátkem $\{0; 0\} = \{0; 0\}'$ při setkání vjezdu **A** do garáže s přídí **Z** auta, událost AZ. Vjezd **A** garáže má tedy stále $x = 0$, výjezd **B** $x = 1$; podobně příď **Z** auta má stále $x' = 0$, záď **Y** auta $x' = -1$.

☺ Po prostudování a všech výpočtech zjistíte, že synchronizace počátkem v události **L** by vedla k mnohem symetričtějším časům. Ale takový už je život, že.

Z hlediska auta (mírněji šikmé přerušované čáry) mu bude garáž krátká a auto ji bude přesahovat po dobu $\Delta T' = \frac{1}{3}$, a to od $T' = \frac{4}{3}$ do $T' = \frac{5}{3}$ vepředu i vzadu. Stav v čase $T' = 1{,}5$ ukazují větší plné kroužky na šikmé úsečce.

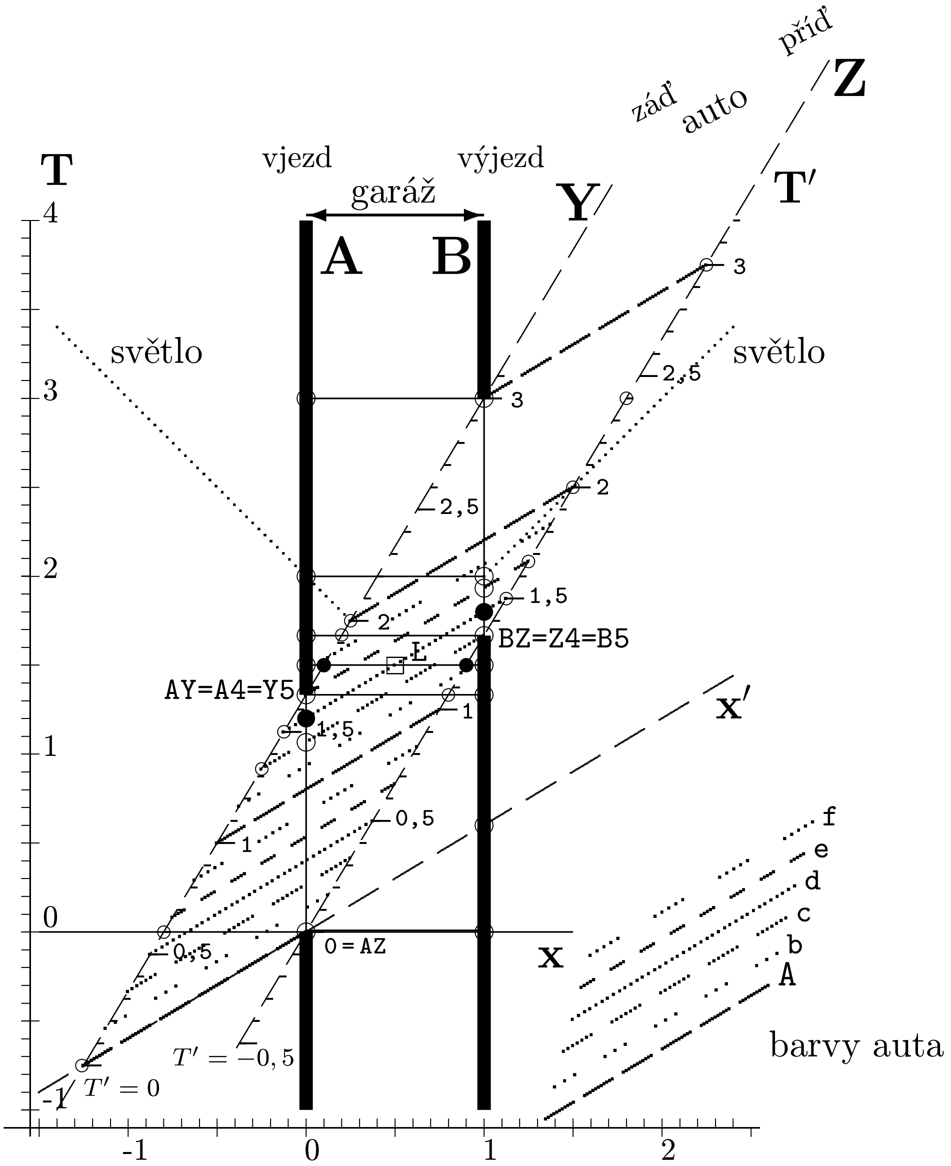
Z hlediska garáže je naopak kratší auto, takže po dobu $\Delta T = \frac{1}{3}$, a to od $T = \frac{4}{3}$ do $T = \frac{5}{3}$, pojede celé uvnitř garáže. Stav v čase $T = 1{,}5$ ukazují menší plné kroužky na vodorovné úsečce.

Auto má 6 barev, `Abcdef`, které střídá šestkrát za **svou** dobu $\Delta T' = 1$ jako chameleon, jak je zobrazeno na intervalu $0 \leq T' \leq 2$ v grafu, a ještě vpravo dole samostatně. V každém okamžiku T' **auta** má auto po celé délce jedinou barvu (typ přerušované čáry). Ale v daném okamžiku T **garáže** má auto po své délce duhu se čtyřmi různými barvami současně. Duha po něm ujíždí směrem kupředu a celé ubíhající auto přejede duha za garážovou dobu $\frac{3}{4}$.

Původní Lorentzova interpretace Z hlediska garáže je auto zkrácené díky kontrakci. Proto se do garáže vejde a popojede kus cesty uvnitř ní. Z hlediska auta: auto ví, že je vlivem pohybu zkráceno ono i jeho metr; samo sebe změří správně, ale garáž svým kratším metrem naměří delší, než ve skutečnosti je. Garáž žádnou kontrakcí zkrácena není. Situace není symetrická, soustava Země „je ta jediná pravá“.

Dnešní pojetí Klíčový význam mají události — setkání AY a BZ.

- AY: záď auta u vjezdu do garáže,
- BZ: příď auta u výjezdu z garáže.



Obrázek 10.4: Vše o rychlém autu a garáži

Interval jimi tvořený je prostorový (relativní současnost, str. 232). V soustavě $\mathcal{S}$ spojené s garáží nastane nejdříve AY (vjel právě konec auta, zbytek auta už je v garáži), poté BZ (zbytek auta je ještě v garáži, příď je u výjezdu). Garážmistr zjistí v čase $\frac{4}{3}$, že auto má záď v AY = A4 = Y5 a příď Z2; je vidět, že zbývá kousek místa Z2-B3 před ním. V časovém intervalu od AY do BZ trvání $\Delta x_0 = 1/3$ tedy „krátké auto jede delší garáží“. V čase $\frac{5}{3}$ má auto záď v Y7 a příď v BZ = Z4 = B5; je naposledy celé v garáži. Poté už bude příď Z mimo garáž.

Naopak v soustavě $\mathcal{S}'$ spojené s autem nastane nejdříve BZ, poté AY. Nyní šikmé čáry ukazují auto barvy `c`, které ve svém čase $\frac{4}{3}$ mělo záď teprve v Y3 a příď už v BZ = Z4 = B5; je vidět, že celá garáž je „navlečena“ na auto a je kratší než auto o úsek Y3-A2. V časovém intervalu od BZ do AY trvání $\Delta x_0' = 1/3$ je tedy „krátká garáž navlečena na delší auto“. V čase $\frac{5}{3}$ má auto barvu `b`, záď určuje událost AY = A4 = Y5 a příď událost Z6; naposledy je na něj garáž navlečena celá. Poté už bude vjezd A mimo auto.

Protože interval AY-BZ je prostorový, existuje i soustava $\mathcal{S}''$, v níž AY, BZ nastanou současně. (Soustavy $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ se vůči $\mathcal{S}''$ pohybují stejnými rychlostmi, ale opačnými směry.) V ní by tedy bylo auto přesně stejně dlouhé jako garáž; příď by byla u výjezdu (**B**) a záď by právě vjížděla do garáže (**A**). Mají stejnou délku $\sqrt{\Delta s^2_{\mathrm{AB}}} < 1$, což je lorentzovský invariant. Ani auto, ani garáž ovšem v této soustavě nemají délku 1.

..? Otázka: Jakou rychlost má $\mathcal{S}''$ vůči $\mathcal{S}$ a jak dlouhé je v ní auto? ($\rightarrow$str. 265)

Soudní spor auta a garáže

Zástupci Auta obžalovali zástupce Garáže, že jim postavili krátkou garáž: když ji míjeli a měřili při prohlídce rychlostí $\beta = 6/10$, zjistili čas T', přiznali `barvu`, uvedli souřadnice své (x') i s číslem události (A2 apod.) a sdělili, co se tam stalo. Všimli si i místní informace z garáže $\{x; T\}$. Poté vše poslali soudu.

Zpráva z auta

čas T' ; `barva`	x'	značka	stalo se	$\{x; T\}$ garáž
< 0 ; ...		auto je celé mimo garáž		
$0 \cdots 4/3$; ...		auto vjíždí do garáže		
0 ; `A`	0	AZ = A1 = Z1	příď u vjezdu	$\{0; 0\}$
	-1	Y1	záď před vjezdem	$\{-5/4; -3/4\}$
$4/3 \cdots 5/3$; ...		auto je i před garáží, i za ní		
$4/3$; `c`	0	**BZ = Z4 = B5**	**příď u výjezdu**	$\{1; 5/3\}$
	$-4/5$	A2	celá garáž kolem auta	$\{0; 16/15\}$
	-1	Y3	záď před vjezdem	$\{-1/4; 11/12\}$
$3/2$; `d`	$-1/2$	L	záblesk uprostřed auta	$\{1/2; 3/2\}$
	1	Z5	příď před výjezdem	$\{9/8; 15/8\}$
	$-1/10$	B6	výjezd na autě	$\{1; 9/5\}$
	$-9/10$	A3	vjezd na autě	$\{0; 6/5\}$
	-1	Y4	záď před vjezdem	$\{-1/8; 9/8\}$
$5/3$; `e`	0	Z6	příď před výjezdem	$\{5/4; 25/12\}$
	$-1/5$	B7	výjezd na autě	$\{1; 29/15\}$
	-1	**AY = A4 = Y5**	**záď u vjezdu**	$\{0; 4/3\}$
$5/3 \cdots 2$; ...		auto vyjíždí z garáže		
2 ; `A`	0	Z7	záblesk u přídě	$\{3/2; 5/2\}$
	-1	Y8	záblesk u zádě	$\{1/4; 7/4\}$
3 ; `A`	-1	BY = Y9 = B9	záď u výjezdu	$\{1; 3\}$
> 3 ;		auto je celé mimo garáž		

Domalovánka:
Vytáhněte barvičkami v grafu barvy auta (např. `b`: žlutá, `c`: modrá, `d`: červená, `e`: zelená, `f`: hnědá) v časech T' mezi 0 a 2 a vodorovným pravítkem sledujte, jak duhové vidí auto garážmistr ve svých různých okamžicích T mezi 0 a 2. Pak se mu nebudete tolik divit.

Ostrou tužkou doplňte číslice 0-9 zdola nahoru ke kroužkům na přímkách **A**, **B**, **Y**, **Z** tam, kde chybějí.

Vytáhněte žlutě oba paprsky světla, a to i ty krátké nezakreslené úseky L-Y8 a L-B8.

Garážmistr byl prozíravý a jak se dalo čekat, také nechal sepsat, co viděli lidé z garáže a okolí. Zde jsou jejich sebrané zprávy.

Zprávy z garáže a okolí

čas	místo	barvy auta / značka	poloha celého auta / detail ***důležité***	podle auta: $\{x';T'\}'$
<0			**auto je celé mimo garáž**	
$0\cdots 4/3$			**auto je částečně v garáži**	
0		`dcbA`	**auto začíná vjíždět do garáže**	
	$-4/5$	Y2	záď	$\{-1;3/5\}'$
	0	AZ = A1 = Z1	příď `A` u vjezdu	$\{0;0\}'$
	1	B1	výjezd	$\{5/4;-3/4\}'$
4/3		`edcb`	**auto je celé v garáži**	
	0	**AY = A4 = Y5**	***záď je u vjezdu***	$\{-1;5/3\}'$
	4/5	Z2	příď	$\{0;6/15\}'$
$4/3\cdots 5/3$			**auto je celé v garáži**	
3/2		`edc`	**auto vjelo celé do garáže**	
	0	A5	vjezd	$\{-9/8;15/8\}'$
	1/10	Y6	záď	$\{-1;9/5\}'$
	1/2	L	záblesk světla	$\{-1/2;3/2\}'$
	9/10	Z3	příď	$\{0;6/5\}'$
	1	B4	výjezd	$\{1/8;9/8\}'$
5/3		`fedc`	**auto začíná vyjíždět z garáže**	
	0	A6	vjezd	$\{-5/4;25/12\}'$
	1/5	Y7	záď	$\{-1;29/15\}'$
	1	**BZ = B4 = Z4**	***příď je u výjezdu***	$\{0;4/3\}'$
$5/3\cdots 3$			**auto je částečně v garáži**	
7/4		`fed`		
	1/4	Y8	záblesk u zádě	$\{-1;2\}'$
2		`bAf`		
	0	A7	záblesk u vjezdu	$\{-3/2;5/2\}'$
	1	B8	záblesk u výjezdu	$\{-1/4;7/4\}'$
5/2		`dcbA`		
	3/2	Z7	záblesk u přídě	$\{0;2\}'$
3		`edcbA`	**auto vyjelo celé z garáže**	
	0	A8	vjezd	$\{-9/4;15/4\}'$
	1	BY = Y9 = B9	záď u výjezdu	$\{-1;3\}'$
>3			**auto je celé mimo garáž**	

Celá záležitost byla předána soudu. Ten shrnul daná fakta a rozhodl.

Soudní zpráva

Shrnutí

Světočáry *garáže*: **A** vjezd, **B** výjezd
Světočáry *auta*: **Y** záď, **Z** příď
Události z historie **A**, **B**, **Y**, **Z** jsou očíslovány: A1-A7, B1-B9, Y1-Y9, Z1-Z9
Událost **L** (light): záblesk světla při setkání středu auta se středem garáže

Klíčové události: setkání **AY**, **BZ**. Setkání AZ, BY podstatná nejsou.
Klíčová otázka: která z událostí **AY**, **BZ** nastala dříve?

Souřadnice událostí — setkání

Souřadnice jsou uvedeny v pořadí a tvaru $\{x; T\}$ v $\mathcal{S}$, resp. $\{x'; T'\}'$ v $\mathcal{S}'$.

$\mathrm{AZ} = \{0;\ 0\} = \{0;\ 0\}' = \mathrm{A1} = \mathrm{Z1}$	do garáže vjíždí (A) příď (Z) auta
$\mathbf{AY = \{0;\ 4/3\} = \{-1;\ 5/3\}' = A4 = Y5}$	do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta
$\mathbf{BZ = \{1;\ 5/3\} = \{0;\ 4/3\}' = B5 = Z4}$	z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta
$\mathrm{BY} = \{1;\ 3\} = \{-1;\ 3\}' = \mathrm{B9} = \mathrm{Y9}$	z garáže vyjíždí (B) záď (Y) auta
$\mathbf{L} = \{1/2;\ 3/2\} = \{-1/2;\ 3/2\}'$	setkání středu auta se středem garáže; záblesk

Souřadnice událostí doplňujících; malé kroužky

Souřadnice vjezdu (**A**) do garáže, když

$\mathrm{A1} = \{0;\ 0\} = \{0;\ 0\}' = \mathrm{Z1}$	do garáže vjíždí (A) příď (Z) auta
$\mathrm{A2} = \{0;\ 16/15\} = \{-4/5;\ 4/3\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta
$\mathrm{A3} = \{0;\ 6/5\} = \{-9/10;\ 3/2\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) nastal uprostřed záblesk L
$\mathbf{A4} = \{0;\ 4/3\} = \{-1;\ 5/3\}' = \mathrm{Y5} = \mathrm{AY}$	**do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta**
$\mathrm{A5} = \{0;\ 3/2\} = \{-9/8;\ 15/8\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) nastal uprostřed záblesk L
$\mathrm{A6} = \{0;\ 5/3\} = \{-5/4;\ 25/12\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta
$\mathrm{A7} = \{0;\ 2\} = \{-3/2;\ 5/2\}'$	záblesk z L dostihne vjezd
$\mathrm{A8} = \{0;\ 3\} = \{-9/4;\ 15/4\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) z garáže vyjíždí (B) záď (Y) auta

Souřadnice výjezdu (**B**) z garáže, když

$\mathrm{B1} = \{1;\ 0\} = \{5/4;\ -3/4\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) do garáže vjíždí (A) příď (Z) auta
$\mathrm{B2} = \{1;\ 3/5\} = \{4/5;\ 0\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) do garáže vjíždí (A) příď (Z) auta
$\mathrm{B3} = \{1;\ 4/3\} = \{1/4;\ 11/12\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta
$\mathrm{B4} = \{1;\ 3/2\} = \{1/8;\ 9/8\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) nastal uprostřed záblesk L
$\mathbf{B5} = \{1;\ 5/3\} = \{0;\ 4/3\}' = \mathrm{Z4} = \mathrm{BZ}$	**z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta**
$\mathrm{B6} = \{1;\ 9/5\} = \{-1/10;\ 3/2\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) nastal uprostřed záblesk L
$\mathrm{B7} = \{1;\ 29/15\} = \{-1/5;\ 5/3\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta
$\mathrm{B8} = \{1;\ 2\} = \{-1/4;\ 7/4\}'$	záblesk z L dostihne výjezd
$\mathrm{B9} = \{1;\ 3\} = \{-1;\ 3\}' = \mathrm{Y9} = \mathrm{BY}$	z garáže vyjíždí (B) záď (Y) auta

Souřadnice zádi auta (**Y**), když:

$\mathrm{Y1} = \{-5/4;\ -3/4\} = \{-1;\ 0\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) do garáže vjíždí (A) příď (Z) auta
$\mathrm{Y2} = \{-4/5;\ 0\} = \{-1;\ 3/5\}'$	dle garáže ($\mathcal{S}$) do garáže vjíždí (A) příď (Z) auta
$\mathrm{Y3} = \{-1/4;\ 11/12\} = \{-1;\ 4/3\}'$	dle auta ($\mathcal{S}'$) z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta

Y4 = $\{-1/8; 9/8\} = \{-1; 3/2\}'$ dle auta ($\mathcal{S}'$) nastal uprostřed záblesk L
Y5 = $\{0; 4/3\} = \{-1; 5/3\}'$ = A4 = AY **do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta**
Y6 = $\{1/10; 3/2\} = \{-1; 9/5\}'$ dle garáže ($\mathcal{S}$) nastal uprostřed záblesk L
Y7 = $\{1/5; 5/3\} = \{-1; 29/15\}'$ dle garáže ($\mathcal{S}$) z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta
Y8 = $\{1/4; 7/4\} = \{-1; 2\}'$ záblesk z L dostihne záď auta
Y9 = $\{1; 3\} = \{-1; 3\}'$ = B9 = BY z garáže vyjíždí (B) záď (Y) auta

Souřadnice přídi auta (**Z**), když:
Z1 = $\{0;0\} = \{0; 0\}'$ dle auta ($\mathcal{S}'$) do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta
Z2 = $\{4/5; 4/3\} = \{0; 16/15\}'$ dle garáže ($\mathcal{S}$) do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta
Z3 = $\{9/10; 3/2\} = \{0; 6/5\}'$ dle garáže ($\mathcal{S}$) nastal uprostřed záblesk L
Z4 = $\{1; 5/3\} = \{0; 4/3\}'$ = B5 = Z4 **z garáže vyjíždí (B) příď (Z) auta**
Z5 = $\{9/8; 15/8\} = \{0; 3/2\}'$ dle auta ($\mathcal{S}'$) nastal uprostřed záblesk L
Z6 = $\{5/4; 25/12\} = \{0; 5/3\}'$ dle auta ($\mathcal{S}'$) do garáže vjíždí (A) záď (Y) auta
Z7 = $\{3/2; 5/2\} = \{0; 2\}'$ záblesk z L dostihne příď auta
Z8 = $\{9/5; 3\} = \{0; 9/5\}'$ dle garáže ($\mathcal{S}$) z garáže vyjíždí (B) záď (Y) auta
Z9 = $\{9/4; 15/4\} = \{0; 3\}'$ dle auta ($\mathcal{S}'$) z garáže vyjíždí (B) záď (Y) auta

Rozhodnutí V soustavě garáže platí **AY** < **BZ**.
V soustavě auta platí **AY** > **BZ**.
Soudní náklady platí obě strany rovným dílem.

Soud nařizuje:

§1 **Čtenáři** doplniti do grafu 10.4 ostrou tužkou číslice 1-9 ke všem událostem plným či prázdným kroužkem značeným, na všech světočarách **A**, **B**, **Y**, **Z** tam, kde chybějí. *Toto bylo mu nakázáno dříve, leč on tak dosud neučinil*;

§2 **Čtenáři** rovněž auto barvičkami dobarviti sobě, jakž týž opět opomněl;

§3 Soud ve věci žaloby konstatuje, že obě strany mají pravdu:
řidič jede dobu 1/3 s garáží navlečenou jako rukávec a kryjící jen část auta;
garážmistr naměřil krátké auto jedoucí dobu 1/3 celé uvnitř jeho garáže;

§4 **Čtenáři**, jakož i **oběma stranám sporu**, výslovně pak se ukládá:
nejen *naučit se* Lorentzovu transformaci zpaměti, ale i *pochopit* její důsledek, že „časová odlehlost mezi dvěma událostmi“ je skutečně relativní, tedy závislá na tom, ze které vztažné soustavy je měřena.

Proti tomuto rozhodnutí není odvolání.

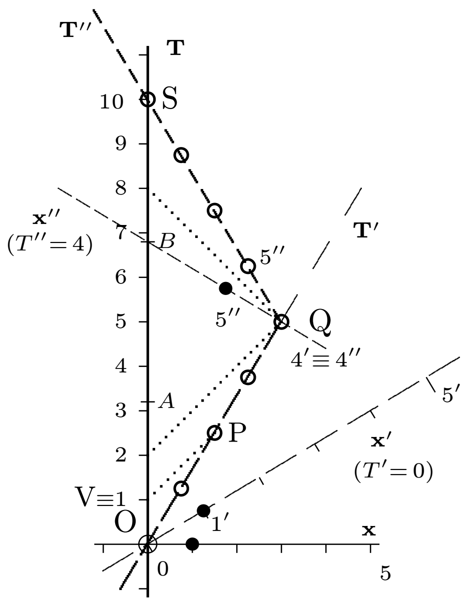
10.6.5 Kanál a víko

Problém Těsně nad kanálem letí poklop stejné klidové délky jako otvor pod ním. Propadne se nebo ne?

Řešení Je to varianta předchozího problému s autem a garáží. Zde je však drobný problém v tom, že poklop musí změnit směr, aby propadl. V STR ovšem neexistuje tuhé těleso, ve kterém by se pokyn o změně směru (třeba poklepnutím na střed poklopu) šířil nekonečně rychle. Bylo by tedy nutno poklepnout na všechny částečky poklopu, a to *současně* — a to je ten kámen úrazu. Současné poklepnutí z hlediska Země = otvoru **není** současné z hlediska poklopu. Ten to cítí jako vlnu poklepů od dělníků na kolemletící Zemi přeběhnuvší nadsvětelnou rychlostí ve směru pohybu Země a *postupně* podsouvající doposud klidný poklop dovnitř kratšího otvoru.

10.6.6 „Paradox dvojčat"

Cestovatel $\mathcal{C}$ míjí (událost O) svého bratra **U**sedlíka $\mathcal{U}$, žijícího na Zeměploše, oblíbenou rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$ s hezkým $\gamma = \frac{5}{4}$. Letí své 4 roky, pak se na místě odrazí (událost Q) a letí zpět. Při znovusetkání (událost S) se zjistí, že Cestovatel cestou zestárl jen o 8 roků (kroužky podél letu na ose $\mathbf{T}'$ tam a $\mathbf{T}''$ zpátky udávají roky), zatímco Usedlík doma zestárl o $8\gamma = 10$ roků (příčky na ose $\mathbf{T}$).



Události

$O \equiv \{0; 0\} = \{0; 0\}'$
$V \equiv \{0; 1\} = \{-3/4; 5/4\}'$
$P \equiv \{3/2; 5/2\} = \{0; 2\}'$
$Q \equiv \{3; 5\} = \{0; 4\}' = \{0; 4\}''$
$S \equiv \{0; 10\} = \{0; 8\}''$
$A \equiv \{0; 16/5\} = \{-12/5; 4\}'$
$B \equiv \{0; 34/5\} = \{-12/5; 4\}''$

Světočáry, osy

Cestovatel tam: O — — — Q
Cestovatel zpět: Q - - - - - - S
pozdravy (světlo): V ··········· P

Obrázek 10.5: Paradox dvojčat

Mohl by se sice otočit gravitačním prakem (str. 331) kolem černé díry, aby neseděl obráceně cestou domů. Ale tím by se mu i obrátila osa **x** a nám znepřehlednily výpočty. Cestovatel nemá žádné motory, tam i zpátky letí jen setrvačností a odráží se (Q) pružně od Všeodrážející Hory.

Opět užíváme kratší označení $T \equiv x_0 = ct$ (jde o čas), a podobně i T' a T''. Světočáry bratrů jsou vyneseny tučně, osy tence; u Usedlíka $\mathcal{U}$ plně, u Cestovatele $\mathcal{C}$ delšími čárkami cestou tam, kratšími zpět. Pozdravy (světelné signály) jsou tečkované. Každý rok Cestovatele $\mathcal{C}$ je značen kroužkem; plné kroužky označují na osách

x, x', x'' jednotku délky; jednotka času je stejně velká (příčky u osy $\mathbf{T}$, kroužky u $\mathbf{T}'$ a $\mathbf{T}''$).

Paradoxní se to zdá jen, pokud čekáme symetrii, pokládáme obě soustavy spojené s bratry za inerciální během cesty tam i zpátky a myslíme, že by mělo tedy platit „podle principu relativity“ pro oba totéž: vrátí-li se jeden mladší ke druhému ($\mathcal{C}$ k $\mathcal{U}$), že by se měl taky vrátit druhý mladší k prvnímu ($\mathcal{U}$ k $\mathcal{C}$).

Situace ale symetrická není. Především soustava $\mathcal{S}$ spojená s $\mathcal{U}$ je inerciální *celou* dobu, zatímco Cestovatel $\mathcal{C}$ jednou zažil obrovské *zrychlení*, když měnil směr, aby se vrátil domů. Po tuto krátkou chvilku (mezi vztažnými soustavami $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{S}''$) není soustava $\mathcal{N}$ s Cestovatelem spojená inerciální. Během odrazu se Cestovateli mění koncepce současnosti podle osy $\mathbf{x}'$ na $\mathbf{x}''$; s událostí Q obratu je v $\mathcal{S}'$ současná událost A, ale v $\mathcal{S}''$ je to událost B.

Dá rozum, že Usedlík $\mathcal{U}$, který opravdu nikdy „nezhřešil neinerciálností“, je na tom jinak než Cestovatel $\mathcal{C}$, který sice nehřešil ani cestou tam, ani zpátky, ale o to více zhřešil v okamžiku (event. krátké doby) změny směru. Zkuste jako námořník uklidnit svou ženu ujištěním, že jste jí byl věrný po celou plavbu tam i zpátky, až na jediný okamžik (event. krátkou dobu) v cíli, konkrétně v přístavu v půli cesty, když se měnil směr jízdy.

Dále, Cestovatel $\mathcal{C}$ porovnává své *jediné* hodiny (odpadá mu tedy jakákoli potřeba synchronizace) s *různými* hodinami během cesty, ale ty musí být synchronizovány — ovšem jdou synchronně podle Zeměplochy, nikoli podle Cestovatele. A pojem současnosti je v STR relativní.

Každý z pozemšťanů, který uvidí po cestě Cestovatele $\mathcal{C}$, zjistí, že Cestovatelovy (jediné) hodiny ukazují menší čas než místní hodiny na Zemi, a z porovnání usoudí, že jdou γ-krát pomaleji než místní („dilatace času“).

Cestovatel $\mathcal{C}$ sleduje pozemské hodiny a zjistí, že i na cestě tam, i zpátky

- každé z (mnoha) potkávaných hodin jdou v souladu s dilatací času γ-krát pomaleji než jeho (jediné); k tomuto zjištění ovšem musí porovnat dva po sobě vyslané časové signály *téhož* pozemského zdroje (hodiny, kalendář) se svými, a ovšem započítat zdržení každého ze signálů na cestě od zdroje k němu;

- každé následující pozemské ukazují čas nejen *větší* než jeho, ale i než by vycházelo podle těch předcházejících pozemských. Jsou tedy pro Cestovatele navzájem rozsynchronizovány (str. 221). Je to projev skutečnosti, že současnost dvou nesoumístných událostí je v STR relativní;

- $\mathcal{C}$ i $\mathcal{U}$ si na tom druhém ověří dilataci dob; $\mathcal{C}$ na $\mathcal{U}$ i kontrakci délek.

Rozeberme obr. 10.5 formou scifi:

Rozvaha Délky x uvádíme ve světelných rocích sr, časy T v rocích r, takže světelná rychlost je vždy $c = \pm 1$ (podle směru šíření světla). Uvedeme ji však pro názornost tam, kde se převádějí doby na délky. Vzdálenosti i rychlosti bereme orientované podle příslušné osy, takže jsou občas záporné (když je Hora od Usedlíka vzdálena 3 r, tak Usedlík je od Hory vzdálen -3 r). Aby bylo všecko i slovně jasné a nemíchaly se pohledy „kubisticky“, tak Cestovatel vůči Usedlíkovi *letí* nejprve rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$, po odrazu letadla $\beta = -\frac{3}{5}$. Obráceně Usedlík s celou Zeměplochou se pod Cestovatelem *řítí* napřed rychlostí $\beta' = -\frac{3}{5}$, po odrazu Zeměplochy (Hory) od Cestovatele se Zeměplocha opět *řítí*, tentokrát rychlostí $\beta'' = +\frac{3}{5}$. Všechny zprávy nesené světlem se *šíří* rychlostí $c = \pm 1$, co do velikosti stejnou pro Cestovatele i Usedlíka.

Z pohledu **Usedlíka** $\mathcal{U}$ proletěl Cestovatel $\mathcal{C}$ (událost O) v okamžiku $T = 0$ rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$ nad ním na průzkum Všeodrážející Hory stojící na kótě $x_{\mathrm{Q}} = 3$, kam by měl Cestovatel doletět v čase $T_{\mathrm{Q}} = x_{\mathrm{Q}}/\beta = 5$. Tam se bleskurychle pružně odrazí a poletí zas zpátky, takže ho lze čekat v čase $T_{\mathrm{S}} = 2T_{\mathrm{Q}} = 10$.

Z pohledu **Cestovatele** se s Usedlíkem míjeli (událost O) v čase $T' = 0$. Cestovatel je stále na stejném místě v letadle $\mathcal{N}$ i vůči $\mathcal{S}'$ a Zeměplocha $\mathcal{S}$ i s Usedlíkem se pod ním řítí rychlostí $\beta' = -\frac{3}{5}$ (vůči Cestovatelovi dozadu, proto to „mínus“). Cestovatel očekává, že se Zeměplocha pod ním bude řítit ještě $T'_{\mathrm{Q}} = 4$ roky, během čehož podběhne o $x'_{\mathrm{Q}} = \beta' T' = -\frac{12}{5}$, a to je také podle Cestovatele vzdálenost Usedlíka od Hory. Pak se vůči jeho $\mathcal{N}$ Zeměplocha rychle zastaví a rozjede opačným směrem. Poté jeho $\mathcal{N}$ splyne s $\mathcal{S}''$ a zase se mu bude Usedlík i s celou Zeměplochou řítit vstříc stejnou dobu opačnou rychlostí co do velikosti stejnou, tentokrát značenou $\beta'' = \frac{3}{5}$. Minou se po dalších 4 letech v čase $T''_{\mathrm{S}} = 2T'_{\mathrm{Q}} = 8$.

Cestovatelova světočára je na obr. 10.5 zobrazena tlustě čárkovaně (tam delší čárky, zpátky kratší), jeho „současnost“ tenkou čarou čárkovanou. Délková jednotka je označená černou tečkou na cestě tam ($1'$ od 0) i zpátky ($5''$ od $4'' \equiv 4'$).

Zeměplocha Souhrnná zpráva Usedlíkova ze všech míst Zeměplochy:

Čas $T = 0\,\mathrm{r}$**:** Událost O $= \{0; 0\}$: Cestovatel proletěl kolem Usedlíka ($x = 0\,\mathrm{sr}$).

Čas $T = 1\,\mathrm{r}$**:** Vyslán $\{0; 1\}$ první pozdrav Cestovatelovi.

Čas $T = 2\,\mathrm{r}$**:** Vyslán $\{0; 2\}$ druhý pozdrav Cestovatelovi (k jeho otočce Q).

Čas $T = 2{,}5\,\mathrm{r}$**:** Cestovatel dostává $\{1{,}5; 2{,}5\}$ Usedlíkův první pozdrav. Jeho hodiny ukazují $T'' = 2\,\mathrm{r}$ oproti našim $T = 2{,}5\,\mathrm{r}$ (dilatace času v $\mathcal{S}'$ vůči $\mathcal{S}$ je γ-krát).

Čas $T = 3{,}2\,\mathrm{r}$**:** Událost A $= \{0; 3{,}2\}$ je pozoruhodná tím, že se u Usedlíka ani jinde na Zeměploše nic zvláštního nestalo.

Čas $T = 5\,\mathrm{r}$**:** Událost Q $= \{3; 5\}$: Cestovatel obrací směr svého letu pružným nárazem Q na Horu. Přijímá pozdrav a hned posílá zpátky pozdrav svůj. Soustava s ním spojená, do té doby inerciální $\mathcal{S}$, se mění v průběhu obratu na neinerciální $\mathcal{N}$, která se vůči $\mathcal{S}$ zastavuje v letu a opět rozjíždí zpátky na letovou rychlost β'' s osou x$''$ nové, opět inerciální soustavy $\mathcal{S}''$.

Čas $T = 6{,}8\,\mathrm{r}$**:** Událost B $= \{0; 6{,}8\}$ je opět pozoruhodná tím, že se u Usedlíka ani jinde na Zeměploše nic zvláštního nestalo.

Čas $T = 8\,\mathrm{r}$**:** Přišel $\{0; 8\}$ pozdrav od Cestovatele, od černé díry.

Čas $T = 10\,\mathrm{r}$**:** Událost S $= \{0; 10\}$: Kolem Usedlíka se mihl Cestovatel; byl ale jen o 8 let starší než při prvním setkání O, zatímco my zestárli o 10 let.

Průběžně jsme ověřovali, že Cestovatelovi plyne na jeho letu tam i zpátky čas pomaleji než nám, protože Cestovatelovy hodiny všude ukazovaly jen $\frac{1}{\gamma} = \frac{4}{5}$ našeho času.

Cestovatelův deník Sedím pořád na místě a jak čas plyne, vnímám události teď $\{0;T'\}'$, pak $\{0;T''\}''$.

Čas $T'_0 = 0\,\mathrm{r}$**:** Nastala událost $\mathrm{O} = \{0;0\}'$, mihla se pode mnou Usedlíkova základna rychlostí $\beta' = -\frac{3}{5}$ (řítí se zpátky, proto záporné znamínko).

Čas $T'_2 = 2\,\mathrm{r}$**:** Jsem v půli cesty od O do Q. Událostí $\mathrm{P} = \{0;2\}'$ je příchod pozdravu od Usedlíka vyslaný ve $\mathrm{V} = \{0;1\}$. Usedlík se už dobu $\Delta T' = 2\,\mathrm{r}$ řítí dozadu a je už $x' = 2 \times \beta' = 1{,}2\,\mathrm{sr}$ za mnou, ale oni tu mají patník $x = 1{,}5\,\mathrm{sr}$. Jsou tedy délkově kontrahovaní v poměru $\frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{4}{5} = 1/\gamma$. Tím jsem si ověřil kontrakci délek na zpět se řítící Zeměploše.

A teď k času: Pozdrav byl odeslaný coby událost $\mathrm{V} = \{0;1\}$ podle nich v čase $T_\mathrm{V} = 1\,\mathrm{r}$. Podle mne ho ale museli poslat v čase $T'_\mathrm{V} = \frac{5}{4}\,\mathrm{r}$, když byli za mnou ve vzdálenosti $x'_\mathrm{V} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{sr}$, tedy $\mathrm{V} = \{\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\}'$. Řítili se totiž rychlostí β', tak za tu dobu se vzdálili právě $x'_\mathrm{V} = \beta' T'_\mathrm{V} = -\frac{3}{5}\frac{5}{4}\,\mathrm{r} = -\frac{3}{4}\,\mathrm{r}$ za mne. Pozdrav potřeboval dobu $\Delta T' = |x'_\mathrm{V}/c| = \frac{3}{4}\,\mathrm{r}$ na cestu zpátky z V ke mně (je $c = 1$), a přiletěl teď, v čase $T'_\mathrm{V} + \Delta T' = T'_\mathrm{V}(1 + |\beta)| = 2$ roky.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{V} \equiv \{0;1\}, \text{ ale} \\ x'_\mathrm{V} = -3/4\,\mathrm{sr} \\ T'_\mathrm{V} = \ 5/4\,\mathrm{r} \\ \Rightarrow \mathrm{V} \equiv \{-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\}' \end{array}}$$

Když přesto tvrdí, že to posílali v $T_\mathrm{V} = 1\,\mathrm{r}$, tak jim na Zeměploše plyne čas $T'_\mathrm{V}/T_\mathrm{V} = \frac{5}{4}$krát pomaleji než mně.

A jak vidím, tak čas jim *tady*, podle jejich míry na $x_\mathrm{P} = 1{,}5\,\mathrm{sr}$, neukazuje podle mého času $T'_2/\gamma' = 1{,}6\,\mathrm{r}$, ale víc, $T = 2{,}5\,\mathrm{r}$. Ovšem to je jejich problém, že jejich *různé* hodiny ukazují různý čas, než se podle mne patří. Podle mne nemají na Zeměploše své hodiny synchronizované. Budu sledovat jen signály z jejich jediných hodin, Usedlíkových, na jeho $x = 0$.

Čas $T'_4 = 4\,\mathrm{r}$**: NASTÁVÁ JEJICH VELIKÝ ODRAZ**

Přišel už druhý pozdrav od Usedlíka; hned jsem mu zpátky poslal pozdravení.

Událost $\mathrm{Q} = \{0;4\}' = \{0;4\}'' = \{3;5\}$ je z jejich pohledu přesně střed mého odrazu o Horu. Pro mne všecko trvalo zanedbatelnou dobu, dejme tomu jednu sekundu, ale aby bylo jasno, tak označím poslední svůj pobyt v $\mathcal{S}'$ jako událost Q_- a první pobyt v nové $\mathcal{S}''$ jako událost Q_+ (je tedy $x'_{\mathrm{Q}_-} = x'_\mathrm{Q} = x''_\mathrm{Q} = x''_{\mathrm{Q}_+} = 0$, a jen $T''_{\mathrm{Q}_+} = T'_{\mathrm{Q}_-} + 1\,$sekunda, to se ani nerozezná). Na Zeměploše se ale dějí věci! Soustava $\mathcal{N}$ se mnou spojená od Q_- do Q_+ je z toho celá neinerciální.

Během té sekundy zařadila Zeměplocha zpátečku a změnila vůči mně svou rychlost z $\beta' = -\frac{3}{5}$ na $\beta'' = \frac{3}{5}$. Ale nejen to. Zeměplocha nejen změnila směr svého pohybu, ale i zestárla, a jak divně! Všude tím víc, čím dál to bylo od místa odrazu pode mnou. Přímo pode mnou nezestárla o nic víc než já. Ale všecko, co bylo v ten moment ode mne ve vzdálenosti $\Delta x'$, zestárlo pro mne za tu sekundu o $\Delta T' = \frac{15}{8}\Delta x'$. Hrůza.

Usedlík, lenoch jeden, byl pořád na $x = 0\,$sr, tak když já měl těsně před odrazem událost Q_-, on měl událost A, můj čas měl $T'_\mathrm{A} = 4\,$r, neboli jeho čas ukazoval pouhých $T_\mathrm{A} = 4\,\mathrm{r}/\gamma = \frac{16}{5}\,\mathrm{r} = 3{,}2\,$r. Byl za mnou vzdálen o $\Delta x' = \beta' T'_{\mathrm{Q}_-} = -\frac{12}{5}\,$sr podle mne, čili já jsem při těch jeho kontrahovaných délkách byl pro něj před ním o $x_{\mathrm{Q}_-} = \gamma \Delta x' = \frac{5}{4}\frac{12}{5}\,\mathrm{sr} = 3\,$sr. To mu celkem dobře vychází i z toho, že já jsem podle něho letěl nad Zeměplochou po dobu jeho 5 let rychlostí $\beta = \frac{3}{5}$. Ovšem bezprostředně *po* tom jejich odrazu, když já mám událost Q_+, je on pro mne v situaci podstatně jiné. Já už musím počítat v $\mathcal{S}''$ a mám souřadnice $x''_{\mathrm{Q}_+} = 0$ a $T''_{\mathrm{Q}_+} = 4$. Nazvu jeho situaci těsně po jejich změně směru událostí B.

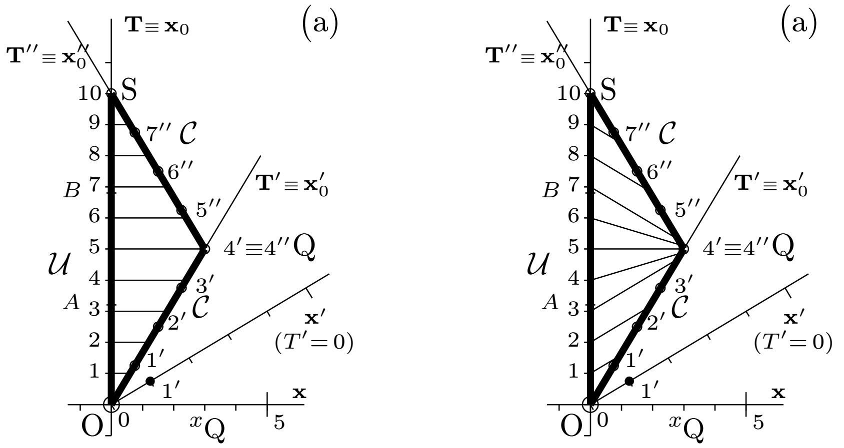
$\mathrm{A} \equiv \{0; 3{,}2\}$, ale
$x'_\mathrm{A} = -12/5\,\mathrm{sr}$
$T'_\mathrm{A} = 4\,\mathrm{r}$
$\Rightarrow \mathrm{A} \equiv \{-\frac{12}{5}; 4\}'$

Usedlík má podle mne stejný čas $T''_\mathrm{B} = 4$ a stejně velkou vzdálenost za mnou: $x''_\mathrm{B} = -\frac{12}{5}\,$sr. Jakou ale má *svou* polohu x_B a čas T_B vůči Zeměploše, v mé nové $\mathcal{S}$? Polohu má pořád stejnou: $x_\mathrm{B} = 0\,$sr, jak ho známe. A čas si spočítáme. Podstatné ovšem je počítat všecko v jediné soustavě, nyní tedy pro mne v $\mathcal{S}''$.

Protože jsem čekal už $T'_\mathrm{Q} = 4\,$r a Usedlík se řítil ode mne dozadu rychlostí $\beta' = -\frac{3}{5}$, je teď $\Delta x'' = -\frac{3}{5}\,$sr za mnou. Teď už se ale řítí rychlostí $\beta'' = \frac{3}{5}$ ke mně, takže mne stihne při události S taky za mé $\Delta T'' = 4\,$sr, tedy za své $\Delta T = 4\,\mathrm{r}/\gamma = 3{,}2\,$r. To je dohromady se stejnou dobou, co se řítil ode mne, jen 6,4 r. On mi ale řekne, že chudák zestárl o 10 roků; kde je těch chybějících $10 - 3{,}2 - 3,2 = 3,6\,$r? Celá jeho doba života od $T_\mathrm{A} = 3{,}2\,$r do $T_\mathrm{B} = 6{,}8\,$r odpovídá mému pobytu v $\mathcal{N}$, jediné sekundě!

$\mathrm{B} \equiv \{0; 6{,}8\}$, ale
$x''_\mathrm{B} = -12/5\,\mathrm{sr}$
$T''_\mathrm{B} = 4\,\mathrm{r}$
$\Rightarrow \mathrm{B} \equiv \{-\frac{12}{5}; 4\}''$

Inu, neinerciální $\mathcal{N}$ — tam se dějou věci! Popisuje to OTR.



Obrázek 10.6: Současnosti podle (a) Zeměplochy (b) Cestovatele

Například v silném gravitačním poli (nebo při velkém zrychlení, to je tam stejné) se tam stárne pomaleji. Ona vlastně STR platí v OTR taky, ale jen lokálně, na *maličkých* oblastech. Ovšem sešít ty *maličké* oblasti dohromady, to je obecně problém, bez složité diferenciální geometrie to nejde. Zkuste slepit přesnou kouli z *maličkých* čtvercových kachlíků a měřit na ní jako dřív na těch kachlíkách! Nejde to.

Čas $T'' = 8\,\mathrm{r}$: Právě je pode mnou Usedlík: je o 10 let starší než při prvním setkání O.

..? Otázka: Jak závisí x', T' na x, T? (→str. 265)

..? Otázka: A jak závisí x'', T'' na x, T? Nezapomeňte, že soustavy nemají společné počátky, ale událost Q = {3; 5} = {2,5; 4}′ a odrazem se mění i směr pohybu. (→str. 265)

10.6.7 Éter

Klasická fyzika nabízela pro vysvětlení Michelsonova-Morleyova pokusu dva modely světla: korpuskulární (Newton — viz str. 191) a vlnový (Huyghens).

Korpuskulární model žádný éter nepoužívá: světlo jsou letící částice (korpuskule) vystřelované svým zdrojem. Model vysvětlí přesně přímočaré šíření světla a odraz světla. Nesouhlasí však rychlost v látkovém prostředí (vychází větší než ve vakuu, viz str. 191); směr při lomu souhlasí jen kvantitativně (v opticky hustším prostředí se láme ke kolmici, ale nikoli podle Snellova zákona). Nesouhlasí dále rychlost c světla při pohybu zdroje: v tomto modelu by se měla rychlost zdroje k rychlosti světla vektorově přičítat. Nevysvětlí tedy, proč světlo pozemské, sluneční i ze Siria mají tutéž rychlost (jak bylo experimentálně ověřeno).

Vlnová teorie vysvětluje světlo jako chvění éteru, asi jako zvuk je chvěním vzduchu nebo železné tyče. V soustavě, v níž je éter v klidu, vysvětlí model vše dobře: přímočaré šíření světla, odraz i lom (a fyzikální optika vysvětlí i další jevy jako polarizaci, difrakci atd.). Rychlost světla nezávisí na rychlosti zdroje. Látkou (neboli hmotným prostředím) je éter ovlivněn tak, že se v něm šíří světlo pomaleji než ve vakuu. Pohybujícím se prostředím je také strháván éter, ale jen částečně, a není jasné, proč nikoli úplně, ale skutečně zvláštním dílem $1 - \frac{1}{n^2}$, viz odst. 10.6.9.

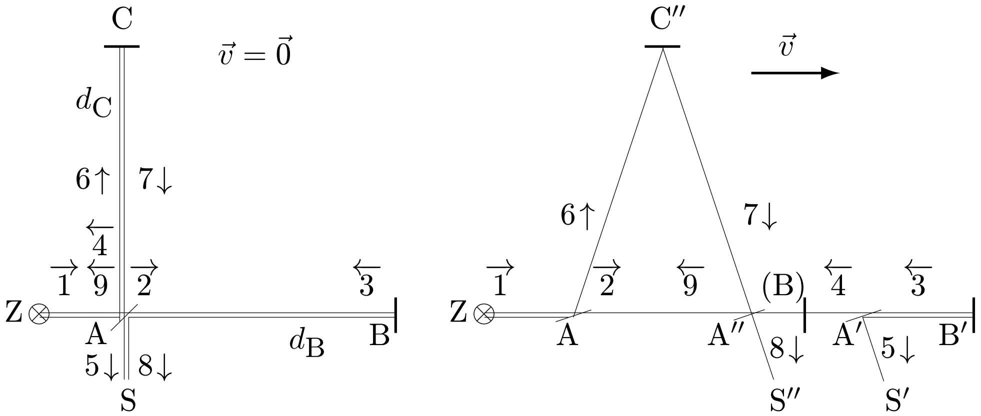
Problémy éteru nastávají, když se pozorovatel vůči němu pohybuje. Pak by měl naměřit nejen Dopplerův jev, tj. změnu kmitočtu — barvy světla (to naměří), ale i rychlost světla vektorově zvětšenou o svou vlastní rychlost (to však bylo pokusy vždy vyvráceno).

Při tom všem zůstává *podstata éteru* utajena a jeho vlastnosti jsou velmi pozoruhodné. Protože světlo je vlnění příčné a nikoli podélné, má éter povahu pevné látky (nikoli plynu či tekutiny). Jeho tuhost musí být obrovská kvůli obrovské rychlosti světla, přitom se však v něm pohybují všechny průhledné předměty, aniž jim klade měřitelný odpor v pohybu, apod.

Teorie relativity nepotřebuje znát model světla. Lorentzova transformace vysvětlí nové skládání rychlostí (z klasického hlediska nepochopitelné) bez ohledu na vlastnosti pohybujícího se objektu tím, že jde o vlastnost prostoročasu, nikoli světla či materiálu přístrojů.

Světlo pokládáme za jev v elektromagnetickém poli, přičemž elektromagnetické pole $\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)$ je vlastnost prostoročasu — stav prostoročasu v bodě $\{\vec{r};t\}$.

10.6.8 Měření rychlosti světla v různých směrech; Michelson-Morley



Obrázek 10.7: Pokus Michelsonův-Morleyův a Kennedyův-Thorndikův

Obr. 10.7 popisuje jak pokus Michelsonův-Morleyův (kde $\overline{\mathrm{AB}} \approx \overline{\mathrm{AC}}$), tak i Kennedyův-Thorndikův (kde $\overline{\mathrm{AB}} \gg \overline{\mathrm{AC}}$). Značme $d_\mathrm{B} = \overline{\mathrm{AB}}$ a $d_\mathrm{C} = \overline{\mathrm{AC}}$.

Je-li interferometr v klidu vůči éteru (vlevo), pak paprsek světla $\overrightarrow{1}$ letí ze zdroje Z k polopropustnému zrcátku A a tam část $\overrightarrow{2}$ projde rovně k zrcátku B, část 6↑ se odrazí k zrcátku C. Paprsek $\overrightarrow{2}$ se odrazí od B a letí zpět $\overleftarrow{3}$ na polopropustné zrcátko A, kde část $\overleftarrow{4}$ letí rovně k Z (je ztracena) a část 5↓ se odráží ke stínítku S.

Paprsek 6↑ se odrazí od C a letí zpět 7↓ na polopropustné zrcátko A, kde část 8↓ letí rovně k S a část $\overleftarrow{9}$ se odráží ke zdroji Z (je ztracena). Na stínítko tedy doletí paprsky 5↓ ZABAS a 8↓ ZACAS. Úseky ZA i AS jsou u obou paprsků stejné a můžeme je tedy ignorovat: na stínítku si tedy konkurují dráhy ABA a ACA.

Paprsky představují harmonické kmitání; rozdíl drah se při stejné rychlosti světla c projeví jako rozdílová doba $\Delta t = |\overline{\mathrm{ABA}} - \overline{\mathrm{ACA}}|/c = 2|d_\mathrm{B} - d_\mathrm{C}|/c$, a tedy rozdíl fází. Kdyby byly obě dráhy AB, AC stejně dlouhé s přesností vlnové délky užitého světla, došly by paprsky ve fázi (str. 117) a maximálně se zesílily. Při fázovém posuvu π by byly v protifázi a navzájem se zcela vyrušily; obvykle nastane něco mezi tím. Posuv fází se projeví interferenčními proužky.

Otočíme-li interferometr vůči éteru o 90°, nezmění se na fázovém posuvu (interferenčních proužcích) nic; eventuální rozdíl drah zůstává stejný, rychlost světla podél drah rovněž.

Pokud se však interferometr vůči éteru pohybuje rychlostí $\vec{v}$, situace se v klasické teorii mění. Mohli bychom to sledovat i na levém obrázku s rychlostí světla galileovsky složenou s $\vec{v}$ (vodorovně: součet a rozdíl, kolmo: Pythagorova věta). Názornější to však je na pravém obrázku z hlediska klidného éteru.

Paprsek $\overrightarrow{2}$ má nejprve prodlouženou dráhu o úsek $\mathrm{BB}' = vt_+$, o který popojede zrcátko B za dobu t_+ potřebnou světlu k uražení dráhy AB'; paprsek od A dohání zrcátko B, které mu ujíždí. Zřejmě

$$d_\mathrm{B} + vt_+ = ct_+ \quad , \tag{10.37}$$

$$\text{odkud} \qquad t_+ = d_\mathrm{B}/(c-v) \quad . \tag{10.38}$$

Na cestě zpátky $\overleftarrow{3}$ se naopak zkrátí dráha k zrcátku A, které paprsku nadbíhá: světlo letí dobu t_- rychlostí c po dráze $\mathrm{B}'\mathrm{A}'$ a platí $d_- = ct_- = d_\mathrm{B} - vt_-$, odkud dostaneme $t_+ = d_\mathrm{B}/(c+v)$. Celkem tedy při zavedení $\beta = v/c$

$$t_+ + t_- = d_\mathrm{B}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) = \frac{2d_\mathrm{B}}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right) \quad . \tag{10.39}$$

Paprsek $6\uparrow$ dorazí za dobu $t_\perp$ od zrcátka A k zrcátku C''; to popojelo zatím z polohy C o $vt_\perp$, takže z Pythagorovy věty

$$d_\mathrm{C}^2 + vt_\perp^2 = ct_\perp^2 \quad , \tag{10.40}$$

$$\text{odkud} \qquad t_\perp = \frac{d_\mathrm{C}}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{10.41}$$

Celková doba letu $\mathrm{AC}''\mathrm{A}'' = 6\uparrow + 7\downarrow$ je dvojnásobek, tedy $2t_\perp$.

Paprsky $\overrightarrow{2} + \overleftarrow{3}$ a $6\uparrow + 7\downarrow$ tedy soustavou procházejí různou dobu a objeví se mezi nimi fázový posuv. (Úseky $\mathrm{A}'\mathrm{S}'$ a $\mathrm{A}''\mathrm{S}''$ jsou stejně dlouhé a nemají tedy vliv na výsledek.) Při otočení o 90° se tentokrát role paprsků zamění, čili posuv bude mít opačné znamení; rozdíl je

$$t_+ + t_- - 2t_\perp = \frac{2}{c}\left(\frac{d_\mathrm{B}}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{d_\mathrm{C}}{1-\beta^2}\right) = \frac{2\gamma}{c}(\gamma d_\mathrm{B} - d_\mathrm{C}) \quad . \tag{10.42}$$

Záporný výsledek Michelsonova-Morleyova pokusu ($d_\mathrm{B} = d_\mathrm{C}$) lze ještě vysvětlit samotným předpokladem Lorentzovy kontrakce ($d_\mathrm{B} \to d_\mathrm{B}/\gamma$) slučitelné s klasickou představou, ale k vysvětlení záporného výsledku Kennedyova-Thorndikeova pokusu to nestačí. Je potřeba navíc přibrat i dilataci času, a ta už je s newtonovským absolutním časem neslučitelná.

Relativistické řešení je triviální: rychlost světla nezáleží na jeho směru letu a nepodléhá Galileovu skládání rychlostí. Otočením přístroje se tedy nic nemění.

10.6.9 „Strhování světla“

Rychlost světla ve vakuu značíme c. V klidném prostředí s indexem lomu n má světlo fázovou rychlost $v = c/n$. Otázkou však je, do jaké míry se éter strhuje v látce s indexem lomu n, která se *pohybuje* rychlostí $w = \beta c$. Experimenty s tekoucí vodou (Fresnel) ukázaly, že se éter strhuje pohybujícím se prostředím (pro rychlost v' světla v pohybujícím se prostředí platí $v' > v$), ale jen částečně {*partial aether-drag hypothesis*}, a to s podivným **strhovacím koeficientem** {*Fresnel drag coefficient*} cca $(1 - 1/n^2)$:

$$v' \approx v + w\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < v + w \quad . \tag{10.43}$$

STR řeší všechny uvedené otázky logicky, bez dalších předpokladů a v úplném souladu s experimentem. „Strhovací činitel“ vyjde jako první přiblížení výsledku relativistického skládání rychlosti světla v látce $v = c/n$ a rychlosti látky $w = \beta c$, totiž

$$v' = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{c^2}} = c\frac{\frac{1}{n} + \beta}{1 + \frac{\beta}{n}} \quad , \tag{10.44}$$

a to můžeme rozvinout v mocninnou řadu podle β:

$$v' = \frac{c}{n} + w\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \beta^2 \dots \quad . \tag{10.45}$$

..? Otázka: Proveďte naznačené odvození podrobně a zjistěte úplný člen druhého řádu. ($\rightarrow$str. 265)

V současných představách nevymýšlíme mechanický model nebo jiný nositel pro elektromagnetické pole. Toto pole popisuje stav prostoru tak, že každému bodu $\vec{r}$ a času t v uvažované oblasti jsou přiřazeny jisté hodnoty $\vec{E}(\vec{r};t)$ a $\vec{B}(\vec{r};t)$. Kvantová teorie se sice „vrátila“ k částicovému pojetí světla jako proudu fotonů, ty ovšem nepojímá mechanisticky, ale jen jako vyjádření toho, že energie $\mathcal{E}$ pole se mění o celistvé násobky výrazu $\Delta\mathcal{E} = hf$. Tento výraz interpretujeme jako energii vznikající či zanikající částice — fotonu — s nulovou klidovou hmotností, světelnou rychlostí a hybností $p = hf/c$.

10.6.10 Světlo v látkovém prostředí a relativita

Nebudeme zde budovat relativistickou teorii elektrodynamiky kontinua, připomeneme jen dva aspekty, které nesmíme ztratit ze zřetele:

- Studujeme-li chování světla v hmotném prostředí (a nikoli ve vakuu), pak *existuje* jistá apriori význačná vztažná soustava, totiž ta, ve které je prostředí v klidu. Není tedy pravda jako ve vakuu, že všechny inerciální soustavy jsou rovnoprávné a zákony v nich mají mít stejný tvar.

- Tvrdíme-li že rychlost v světla v látce s indexem lomu n je rovna $v = c/n$, pak tím rozumíme fázovou rychlost monochromatického světla v *ustáleném* stavu, nikoli v *přechodovém* stavu při vniknutí světla do prostředí. Čelo elektromagnetické vlny rozkmitá nosiče náboje tvořící látku, ty — tím, že kmitají — vyzařují elektromagnetické pole. To se sčítá se stále dopadající vlnou, a výsledkem je v rovnovážném stavu situace, kdy zpětná vlna se vyruší a dopředná se pohybuje rychlostí c/n. Nežli se ovšem k rovnovážnému stavu dojde, trvá to jistou přechodovou dobu (**prekurzor** — světelné vlny před dosažením rovnovážného stavu viz např. $\mathbf{W}_{\mathrm{EN}}$→precursor (physics) {˜}). Má-li tedy za jistých okolností látka (plasma) index lomu $n < 1$, pak to není ve sporu s teorií relativity. *V ustáleném stavu* bude v takové látce fázová rychlost světla nadsvětelná. Ovšem tím, že jde o ustálený stav, nepřenáší vlna žádnou novou informaci. Kdybychom poslali pulz (nebo obecně změnili ustálený stav), pak by se šířil světelnou rychlostí a deformoval by se přitom. Nadsvětelnou rychlost by vlna vykazovala až později, v informačně sterilním ustáleném stavu.

10.7 Vektorový formalismus, čtyřvektory

10.7.1 Základní idea

Lorentzovu transformaci, tedy přechod mezi dvěma navzájem se pohybujícími inerciálními soustavami, lze interpretovat jako otočení ve 4D-prostoročase s metrikou podle rov. (10.46).
Naše další strategie bude následující:

- zvolíme klasickou rovnici platnou v jedné inerciální soustavě
- zapíšeme ji veličinami invariantními vůči Lorentzově transformaci anebo veličinami majícími při této transformaci známé chování (čtyřvektory, čtyřtenzory...)
- z platnosti této rovnice v jedné inerciální soustavě plyne její platnost i v libovolné jiné inerciální soustavě (po Lorentzově transformaci).

10.7.2 Metrika

Indexy probíhající čísla 0, 1, 2, 3 se značí zpravidla řeckými písmeny (μ, ν, κ, ...).
Indexy v 3D případě probíhají čísla 1, 2, 3 a značí se písmeny latinskými (i, j, k, ...).

Metrika určuje *maličkou* (odst. 1.8.4) vzdálenost v prostoru. Je dána **metrickým tenzorem** kovariantním $g_{\mu\nu}$, resp. kontravariantním $g^{\mu\nu}$ (viz odst. 2.3.7):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0 + \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^3 && (10.46)\\
&= -\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_0 + \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_3 && (10.47)\\
&\equiv \sum_{\mu,\,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{3} g^{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x_\nu && (10.48)\\
\text{kde} & && (10.49)\\
g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} &= -1 \qquad \text{pro } \mu = \nu = 0 && (10.50)\\
&= 1 \qquad \text{pro } \mu = \nu = 1, 2, 3 && (10.51)\\
&= 0 \qquad \text{pro } \mu \neq \nu \quad . && (10.52)
\end{aligned}$$

Analogicky je skalární součin q dvou čtyřvektorů v_μ, w_μ definován vztahem

$$q = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}v^\mu w^\nu = g^{\mu\nu}v_\mu w_\nu \quad , \tag{10.53}$$

poslední zápis s užitím Einsteinovy sčítací konvence ze str. 37.

Zápis tohoto typu se užívá v obecné teorii relativity vždy. Nyní se většinou užívá i v STR; tam jsou složky kovariantní v_μ i kontravariantní v^μ stejné.

Lze-li v prostoru zavést takovou metriku, kde složky tenzoru křivosti $g^{\mu\nu}$ nabývají jen některých z hodnot -1 či 0 či $+1$, nazývá se prostor **plochý** {*flat space*}. Není-li to možné, nazýváme prostor **zakřivený** {*curved space*}, např. povrch koule.

10.7.3 Čtyřskaláry, čtyřvektory, čtyřtenzory

V klasické teoretické mechanice nazýváme **skalárem** veličinu, která se při otočení vztažné kartézské soustavy nemění a **vektorem** 3D veličinu, jejíž složky se při otočení vztažné kartézské soustavy transformují stejně jako složky diferenciálu $\mathrm{d}\vec{r}$ polohového vektoru.

Veličinu nazveme **čtyřskalárem** {*Lorentz scalar*} ve 4D prostoročase, jestliže je invariantem při Lorentzově transformací; jinými slovy, má-li výraz, který ji definuje, stejný tvar i stejnou hodnotu ve všech soustavách spojených Lorentzovou transformací. Je to např. elektrický náboj Q, anebo, jak jsme dříve zjistili, prostoročasový interval s^2 z rov. (10.103), a jak v odst. 10.7.4 zjistíme, vlastní čas (s elementem $\mathrm{d}\tau := \mathrm{d}t/\gamma$, což je, přesněji řečeno, vlastní *doba*, tj. rozdíl dvou časových údajů).

Veličinu $\{X_\lambda\}$ v prostoročase s osami x_κ nazveme **čtyřvektorem** {*4-vector*}, {*four-vector*}, jestliže se transformuje Lorentzovou transformací stejně jako „posunutí“ $\{\mathrm{d}\vec{X}\} = \{\mathrm{d}x_0; \mathrm{d}x_1; \mathrm{d}x_2; \mathrm{d}x_3\}$ události popsané bodem $\vec{X}$. Čtyřvektor zde budeme značit kapitálkou a řeckým indexem, např. X_κ. Jeho poslední tři složky tvořící 3D vektor značíme toutéž minuskulí a latinským indexem, např. x_k.

Analogicky, tedy transformačními vlastnostmi, můžeme zavést **čtyřtenzory** libovolného řádu. **Čtyřtenzor elektromagnetického pole** složený z elektrické intenzity $\vec{E}$ a magnetické indukce $\vec{B}$ popíše relativisticky správně chování a vzájemnou souhru obou těchto polí v klasické teorii spojených **Maxwellovými rovnicemi**; i ty lze pochopitelně ve vakuu zapsat relativisticky invariantně, a to ve velice jednoduchém tvaru užitím potenciálů φ a $\vec{A}$. Přítomnost hmotného prostředí a zavedení fenomenologických veličin permitivity ε, permeability μ a vodivosti σ vystředováním mikroskopických polí podle **Lorentzovy mikroskopické teorie** samozřejmě problematiku přiměřeně zesložití.

10.7.4 Vlastní čas (vlastní doba)

Čas t byl v klasické mechanice invariantem Galileovy transformace, a bylo proto možné podle času t derivovat. V STR však čas $T = ct = x_0$ se nechová jako skalár, ale je to jen jedna ze složek polohového čtyřvektoru (s nepodstatnou multiplikační konstantou c). Ukážeme však, že veličina zvaná **vlastní čas** (resp. **vlastní doba**)

$$\tau := \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1-\beta^2} \qquad \text{(a ovšem i } c\tau = \frac{T}{\gamma}\text{)} \tag{10.54}$$

uvedená již na str. 235 a určující údaj hodin v soustavě, ve které jsou hodiny v klidu (tedy fakticky to, co hodiny skutečně ukazují), invariantem je, a je tedy vhodná k použití všude, kde jsme v klasické fyzice potřebovali čas či dobu, např. pro derivace podle času.

Uvažujme pohybující se hodiny a zvolme osu **x** ve směru jejich pohybu. Rozdíly souřadnic událostí *maličko* od sebe vzdálených značme jako obvykle značkou diferenciálu, d. Víme, že ve směrech y, z kolmých k pohybu nedochází k žádným změnám a pro $x_0 = ct$ platí

$$\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - \beta \mathrm{d}x_0) \quad , \tag{10.55}$$

$$\mathrm{d}x_0' = \gamma(\mathrm{d}x_0 - \beta \mathrm{d}x) \quad . \tag{10.56}$$

V soustavě $\mathcal{S}'$ spojené s hodinami je ovšem $\mathrm{d}x' = 0$, a tedy $\mathrm{d}x = \beta \mathrm{d}x_0$, a z druhé rovnice pak plyne

$$\mathrm{d}x_0' = \gamma(\mathrm{d}x_0 - \beta(\beta \mathrm{d}x_0)) = \gamma(1-\beta^2)\mathrm{d}x_0 = \mathrm{d}x_0/\gamma \tag{10.57}$$

a podle definice $\mathrm{d}x_0 = c\mathrm{d}\tau$ platí i

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} \quad . \tag{10.58}$$

Protože pro $\beta \neq 0$ je vždy $\gamma > 1$, je také vlastní doba $\mathrm{d}\tau$, kterou změříme hodinami, vždy menší než doba změřená v libovolné vztažné soustavě $\mathcal{S}$, vůči níž se tyto hodiny pohybují: „pohybující se hodiny jdou pomaleji“.

Uvedený vztah lokálně platí i tehdy, když se hodiny pohybují z bodu A do B s proměnnou rychlostí; z toho plyne

$$\tau_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{d}t}{\gamma} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t \quad . \tag{10.59}$$

10.7.5 Polohový čtyřvektor X

Jak lze očekávat, **polohový čtyřvektor** {*position four-vector*} X_λ odpovídající polohovému vektoru pro 4D prostoročas bude složen z časové složky $x_0 = ct$ a z polohového vektoru x_i v dalších třech složkách:

$$X_\lambda = \{x_0; x_1; x_2; x_3\} = \{ct; x_1; x_2; x_3\} \quad . \tag{10.60}$$

10.7.6 Čtyřvektor rychlosti — čtyřrychlost U

Ve 3D jsme zavedli rychlost vztahem

$$v_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{10.61}$$

protože dt byl vůči Galileově transformaci invariant.

Čtyřrychlost U_λ zavedeme analogicky 3D rychlosti v, ovšem opět nikoli derivací podle „obyčejného" času t, ale podle vlastního času τ (kurzivové U jistě nezaměníte s některou událostí značenou stojatě: U):

$$U_\lambda = \frac{\mathrm{d}X_\lambda}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}X_\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}X_\lambda}{\mathrm{d}t} = \{\gamma c; \gamma v_1; \gamma v_2; \gamma v_3\} \quad . \tag{10.62}$$

Všimněme si, že díky záporné časové složce g^{00} metrického tenzoru (odst. 10.7.2) je čtverec čtyřrychlosti konstantní:

$$U_\lambda \cdot U_\lambda = g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = \gamma^2(-c^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = c^2\gamma^2(-1 + \beta^2) = -c^2 \quad . \tag{10.63}$$

10.7.7 Čtyřvektor hybnosti P; hmotnost

V klasické mechanice je hybnost $\vec{p}$ definována vztahem

$$\vec{p} := m_0\vec{v} \quad , \tag{10.64}$$

kde m_0 je charakteristika částice zvaná hmotnost; v STR ji nazýváme **klidovou hmotností**. Čtyřhybnost zavedeme proto vztahem

$$P_\lambda := m_0 U_\lambda = m_0\gamma\{c; v_1; v_2; v_3\} \quad . \tag{10.65}$$

Zavedeme-li *relativistickou hmotnost* m vztahem

$$m := \gamma m_0 \quad , \tag{10.66}$$

můžeme analogicky s klasickou mechanikou psát

$$P_0 = mc \quad ; \quad P_1 = mv_1 \quad ; \quad P_2 = mv_2 \quad ; \quad P_3 = mv_3 \quad , \tag{10.67}$$

takže platí opět klasická definice rov. (10.64), jenom s hmotností nikoli klidovou m_0, ale relativistickou m. Časovou složku mc budeme později, z rov. (10.83), interpretovat jako E/c, kde E bude energie sledované částice.

10.7.8 Čtyřvektor zrychlení A

Další derivací zjistíme snadno čtyřvektor zrychlení:

$$A_\lambda = \frac{\mathrm{d}U_\lambda}{\mathrm{d}\tau} = \gamma \frac{\mathrm{d}U_\lambda}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{10.68}$$

např. pro složku $\lambda = 1$

$$A_1 = \gamma \left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} \gamma + v_1 \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \right) = \gamma^2 a_1 + \frac{\gamma^4}{c^2} \frac{v_1(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2} \quad , \tag{10.69}$$

jak se zjistí výpočtem $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$.

Derivací rov. (10.63) podle τ dále zjistíme, že čtyřrychost a čtyřzrychlení jsou na sebe kolmé:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \sum_\lambda U_\lambda U_\lambda = 2 \sum_\lambda A_\lambda U_\lambda \quad , \text{tedy} A \perp U \quad . \tag{10.70}$$

Toho využijeme v následujícím odstavci při interpretaci časové složky čtyřvektoru síly.

10.7.9 Čtyřvektor síly. Pohybová rovnice

Klasická pohybová rovnice (druhý Newtonův zákon) zněla ve 3D

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\vec{v} = \vec{f} \quad , \tag{10.71}$$

kde $\vec{f}$ byla klasická 3D síla. Skalárním násobením rychlostí $\vec{v}$ jsme dostali zákon zachování energie:

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad , \text{čili} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad . \tag{10.72}$$

Podobnou analogií jako dříve zavedeme čtyřsílu F_λ tak, aby platilo

$$\frac{\mathrm{d}P_\lambda}{\mathrm{d}\tau} = m_0 \frac{\mathrm{d}U_\lambda}{\mathrm{d}\tau} = F_\lambda \quad . \tag{10.73}$$

Tři prostorové složky budou s uvážením $\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}\tau$ odpovídat rovnici

$$m_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\gamma v_\lambda) = F_\lambda / \gamma \tag{10.74}$$

a budou tedy souhlasit s klasickou rovnicí, zvolíme-li čtyřsílu F tak, aby

$$F_1 = \gamma f_1 \quad , \quad F_2 = \gamma f_2 \quad , \quad F_3 = \gamma f_3 \quad . \tag{10.75}$$

K určení a interpretaci časové složky F_0 užijeme jednak rov. (10.73), tedy

$$m_0 \frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}\tau} = F_0 \quad , \text{neboli} \quad F_0 = \gamma m_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma c) \quad , \tag{10.76}$$

jednak skalárního čtyřsoučinu rov. (10.73) se čtyřrychlostí U_λ, o němž dokážeme, že je roven nule:

$$\begin{aligned} \sum_\lambda F_\lambda \cdot U_\lambda &= \sum_\lambda m_0 \frac{\mathrm{d}U_\lambda}{\mathrm{d}\tau} \cdot U_\lambda && (10.77) \\ &= \sum_\lambda m_0 A_\lambda \cdot U_\lambda && (10.78) \\ &= 0 \quad . && (10.79) \end{aligned}$$

Je tedy

$$0 = \sum_\lambda F_\lambda \cdot U_\lambda = \gamma^2 \sum_\lambda f_\lambda \cdot v_\lambda \quad , \tag{10.80}$$

odkud

$$F_0 c\gamma = -\gamma^2 \sum_{k=1}^{3} f_k \cdot v_k \quad . \tag{10.81}$$

Eliminací F_0 z rov. (10.76) a (10.81) dostaneme po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m_0 c^2) = \sum_{k=1}^{3} f_k \cdot v_k \quad . \tag{10.82}$$

Člen v závorce tedy odpovídá kinetické energii z rov. (10.72); označme ho E:

$$E := \gamma m_0 c^2 = mc^2 \quad ; \tag{10.83}$$

k jeho (mis)interpretaci viz též odst. 1.8.6. Rozviňme γ podle binomické věty:

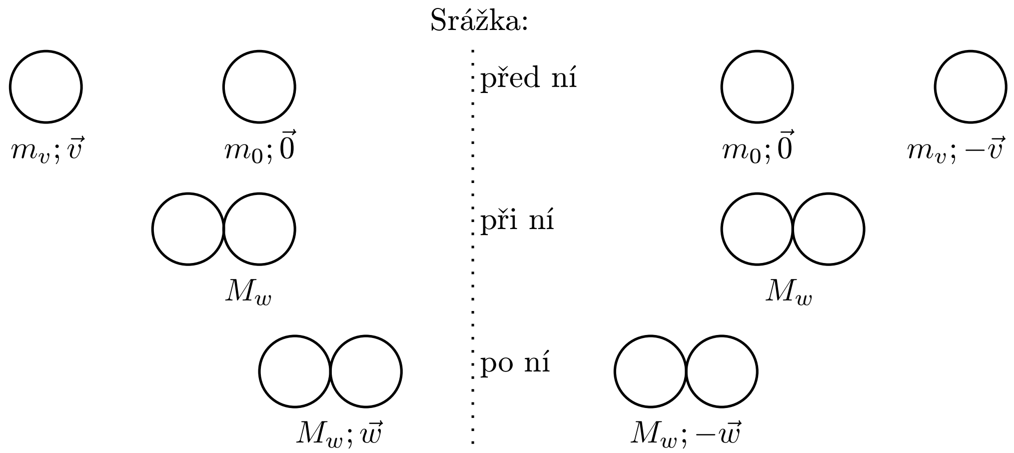
$$\begin{aligned} E &= m_0 c^2 (1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 \dots) && (10.84) \\ &= m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots \quad . && (10.85) \end{aligned}$$

Časová složka čtyřhybnosti z rov. (10.67) tedy skutečně souvisela s energií, přesněji

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{E}{c} \quad , && (10.86) \\ F_0 &= \frac{\gamma}{c} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \quad . && (10.87) \end{aligned}$$

10.7.10 Relativistická hmotnost; jiné odvození

K pojmu relativistické hmotnosti můžeme též přijít rozborem dokonale nepružné relativistické čelní srážky dvou stejných koulí. Uvažujme ráz koule hmotnosti m_v s rychlostí v a klidné koule hmotnosti m_0; výsledkem bude těleso hmotnosti M_w s rychlostí w, viz levá strana obr. 10.8. Tutéž situaci pak popíšeme jednak z hlediska druhé koule jako klidné (zrcadlová symetrie, viz pravá strana obr. 10.8), jednak přepočteme rychlosti vzorcem pro skládání s rychlostí $-v$.



Obrázek 10.8: Relativistický dokonale nepružný ráz

Předpokládáme zákon zachování hybnosti, hmotnosti a k přechodu z $\mathcal{S}$ do $\mathcal{S}'$ použijeme relativistické skládání rychlostí:

$$p = M_w w = m_v v + m_0 0 \qquad \text{ZZ hybnosti,} \tag{10.88}$$

$$M_w = m_v + m_0 \qquad \text{ZZ hmotnosti,} \tag{10.89}$$

$$-w = \frac{w - v}{1 - \frac{wv}{c^2}} \qquad \text{složení rychlostí } w \text{ a } -v. \tag{10.90}$$

Z prvních dvou rovnic plyne

$$m_v\, v = (m_v + m_0)\, w \quad , \text{ odkud} \tag{10.91}$$

$$w = v \frac{m_v}{m_v + m_0} \quad . \tag{10.92}$$

Z transformace rychlostí rov. (10.90) plyne

$$w\left(1 - \frac{wv}{c^2}\right) = v - w \quad , \tag{10.93}$$

odkud dosazením z rov. (10.92) a poté po vykrácení $\frac{v}{m_0+m_v}$ dostaneme

$$m_v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\frac{m_v}{m_0+m_v}\right)=m_0+m_v-m_v \quad , \tag{10.94}$$

vyrušíme m_v a rozšíříme m_0+m_v:

$$\begin{aligned} m_v\left(m_0+m_v-\frac{v^2}{c^2}m_v\right) &= m_0(m_0+m_v) \quad , && (10.95)\\ m_v^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) &= m_0^2 \quad , && (10.96)\\ m_v &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{, neboli} && (10.97)\\ m &= \gamma m_0 \quad , && (10.98) \end{aligned}$$

v souladu s rov. (10.66).

10.7.11 ↩Obecná Lorentzova transformace (4D prostoročas x, y, z, t)

Posuv ve směru společném osám x, x′

Zobecnění Lorentzovy transformace pro 3D prostor je snadné, dokud zůstaneme při tom, že soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}'$ mají osy $\mathbf{x}$, x' ležící na téže přímce a navzájem se pohybují podél ní (jak tomu bylo ve speciální Lorentzově transformaci). Pak transformace nemění nic ve směru os y a z, takže rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,(x - vt)\\ y' &= y\\ z' &= z\\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,\left(-\frac{v}{c^2}x + t\right) \quad . \end{aligned} \tag{10.99}$$

resp. se značením $x_0=ct$, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$

$$\begin{aligned} x_0' &= \gamma(x_0 - \beta x_1)\\ x_1' &= \gamma(-\beta x_0 + x_1)\\ x_2' &= x_2\\ x_3' &= x_3 \quad . \end{aligned} \tag{10.100}$$

Výslovně zdůrazněme, že při pohybu podél jedné z os se ostatní dvě „transformují“ identitou, tedy bez jakékoliv změny: žádná kontrakce v nich nenastává.

Posuv v obecném směru, obecná orientace os v $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$

Obecná Lorentzova transformace {*general* ˜}, (pohyby i zrcadlení v libovolném směru) shrnuje a zahrnuje tyto dílčí transformace:

- speciální Lorentzova transformace podél jistého směru v 3D prostoru;
- posunutí počátku O souřadnic a času;
- otočení prostorových os kolem počátku O;
- inverze prostorových os;
- inverze času;
- identická transformace.

Obecné Lorentzovy transformace tvoří grupu. Zde se jí dále nebudeme zabývat.

Pro obecný směr rychlosti $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, při synchronizaci počátků a bez inverzí zní obecná Lorentzova transformace takto:

$$
\begin{aligned}
x'_0 &= \gamma\, x_0 - \gamma\beta_1\, x_1 - \gamma\beta_2\, x_2 - \gamma\beta_3\, x_3 \\
x'_1 &= -\gamma\beta_1\, x_0 + \left(1 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2}\right) x_1 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2}\, x_2 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2}\, x_3 \\
x'_2 &= -\gamma\beta_2\, x_0 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2}\, x_1 + \left(1 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2}\right) x_2 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2}\, x_3 \\
x'_3 &= -\gamma\beta_3\, x_0 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2}\, x_1 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2}\, x_2 + \left(1 + \tfrac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2}\right) x_3 \quad .
\end{aligned}
\tag{10.101}
$$

I tato podmnožina tvoří grupu. A my se jí také dále nebudeme zabývat.

10.7.12 ↩Minkowského symbolika

Minkowski, dřívější Einsteinův učitel, navrhl v r. 1908 využít k popisu prostoročasu komplexních čísel, s imaginární jednotkou $\mathrm{i}^2 = -1$. Zavedeme-li totiž novou proměnnou

$$x_4 := \mathrm{i}\, x_0 = \mathrm{i}\, ct \quad , \tag{10.102}$$

lze rov. (10.46) přepsat do tvaru (srov. odst. 2.3.7 a odst. 10.7.2)

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \mathrm{d}x_4^2 = \sum_{\kappa=1}^{4} \mathrm{d}x_\kappa \mathrm{d}x_\kappa \tag{10.103}$$

zcela analogicky 3D prostoru. Zjistíme, že čtveřice $\{x_\kappa\}_1^4$ popisující událost se při Lorentzově transformaci chová jako vektor ve čtyřrozměrném prostoru s obvyklými pravidly pro rovnost, skládání, skalární součin a velikost vektoru. Lorentzovu transformaci lze pak interpretovat jako rotaci 4D-vektoru ve 4D-prostoročase:

$$x'_\iota = L_{\iota\kappa} x_\kappa \quad , \tag{10.104}$$

kde transformační Lorentzova matice $L_{\iota\kappa}$ má tvar typický pro popis rotace

$$L_{\iota\kappa} = \begin{pmatrix} \gamma & \mathrm{i}\,\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\,\mathrm{i}\,\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.105}$$

a je unitární: $\sum_\iota L_{\iota\kappa} L_{\iota\lambda} = \delta_{\kappa\lambda}$, takže se při ní zachovává velikost vektoru a invariance intervalu je automaticky splněna.

Formálně jde v rov. (10.103) o euklidovskou metriku při proměnných $x_1, \ldots, x_4$. Rozdíl je však v tom, že díky imaginární jednotce ve čtvrté proměnné vektoru v_k může být čtverec v^2 velikosti vektoru nejen kladný nebo nulový, ale i záporný, a dále že může být roven nule i pro nenulový vektor v_k. Pro odlišení od normální euklidovské metriky proto nazýváme tuto metriku **pseudoeuklidovskou**.

V této metrice leží na grafu body A od počátku O stejně vzdálené nikoli na kružnicích $(x^2 + y^2 = r^2)$, ale na rovnoosých hyperbolách ($x^2 - x_0^2 = \pm I^2$, kde I je invariant). Moc názorné to ovšem není a zde jsme toho nepoužívali.

Minkowského idea je dobrou, názornou pomocí pro pochopení STR, protože se vyjadřuje známým jazykem vektorového počtu a popíše Lorentzovu transformaci jako rotaci (4D, jak bylo dříve řečeno). Nepomůže však v OTR, kde je křivost prostoru jeho podstatnou charakteristikou; nelze ho tedy popsat prostorem plochým. Lze sice v každém bodě $\vec{r}$ vytvořit **lokálně inerciální soustavu** $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}(\vec{r})$ se souřadnicemi i rychlostmi shodnými s obecnou zkoumanou soustavou, ale zrychlením nulovým. Ta popisuje plochý, lokálně tečný prostoročas, ale tyto soustavy nelze propojit navzájem v různých bodech bez užití diferenciální geometrie úplného prostoročasu.

Obliba Minkowského komplexní symboliky upadla s rozšířením znalosti OTR. Nyní se dává přednost formulacím s metrickým tenzorem (10.46), proměnnými x_0, x_1, x_2, x_3 a metrikou $(-+++)$, tzn. $g^{00} = -1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = +1$, $g^{\mu\nu} = 0$ pro $\mu \neq \nu$.

10.8 Řešení úloh

Odpověď ze str. 229: Platí-li $b := x/x_0 = 1$, je $x' = x'_0$, čili $\beta' := x'/x'_0 = \frac{\gamma(x-\beta x)}{\gamma(x-\beta x)} = 1$ pro každé $\beta \neq 1$.

Odpověď ze str. 237: $\mathrm{B} = \{4/5; 0\} = \{1; -3/5\}'$; $\mathrm{C} = \{5/4; 3/4\} = \{1; 0\}'$.

Odpověď ze str. 241: Nikoli ovšem $\beta/2 = 3/10$, ale $\beta'' = (1 - 1/\gamma)/\beta = 1/3$; délka auta v $\mathcal{S}''$ je $d''_{\mathrm{a}} = d''_{\mathrm{g}} = \sqrt{8/9}$.

Odpověď ze str. 251: Vztah mezi souřadnicemi $\{x'; T'\}$ a $\{x; T\}$ je dán Lorentzovou transfomací:

$$x' = \gamma(x - \beta T) = \frac{5}{4}(x - \frac{3}{5}T) \quad , \tag{10.106}$$

$$T' = \gamma(T - \beta x) = \frac{5}{4}(T - \frac{3}{5}x) \quad . \tag{10.107}$$

Odpověď ze str. 251: Vztah mezi souřadnicemi $\{x''; T''\}$ a $\{x; T\}$ je také dán Lorentzovou transfomací, ale pozor: jednak máme navzájem posunuté počátky, protože si v Q odpovídají $\{3;\ 5\}$ a $\{0;\ 4\}''$, jednak se rychlost β změnila na $-\beta$. Tedy rozepsáno:

$$(x'' - 0) = \gamma\Big((x-3) + \beta(T-5)\Big) = \frac{5}{4}\Big((x-3) + \frac{3}{5}(T-5)\Big) \quad , \tag{10.108}$$

$$(T'' - 4) = \gamma\Big((T-5) + \beta(x-3)\Big) = \frac{5}{4}\Big((T-5) + \frac{3}{5}(x-3)\Big) \quad . \tag{10.109}$$

Stručněji, ale méně názorně

$$x'' = -7{,}5 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}T \quad , \tag{10.110}$$

$$T'' = -4{,}5 + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}T \quad . \tag{10.111}$$

Odpověď ze str. 254: $-c\beta^2 n^{-1}(1 + n^{-2})$.

Prurez mechanikami - text.indd 266 05.01.2024 13:38:01